DR. Adem Zengin

Proses Kontrole Giriş

ISBN 978-625-846-612-6

değişim®

PROSES KONTROLE GİRİŞ

Dr. Âdem ZENGİN

2022

değişim®

PROSES KONTROLE GİRİŞ / Dr. Âdem ZENGİN

TASARIM: İbrahim Cihan

ISBN: 978-625-8466-12-6

© 2021 DEĞİŞİM YAYINLARI

Çatalçeşme Sk. 52/2
Cağaloğlu / İstanbul
Tel : + 90 (212) 514 29 71
Faks : + 90 (212) 514 42 31

Postane Sk. 3 Sakarya
Tel : + 90 (264) 278 56 39 / 272 13 81
Faks : + 90 (264) 273 52 99
www.degisimkitap.com
www.degisimyayinlari.net
bilgi@degisimyayinlari.net

Bu yayının 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'na göre her hakkı Değişim Yayınlarına aittir. Gerçek ve tüzel kişiler tarafından izinsiz çoğaltılamaz ve dağıtılamaz.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ 1

1.1 Kontrol Sisteminin Temel Yapısı 2

1.2 Kontrol Sistemi Örnekleri 4

1.3 Proses Kontrolün Hedefleri 5

2 MATEMATİKSEL MODELLEME 7

2.1 Modellemede Hedef Belirleme 8

2.2 Modellemede Metot 9

2.2.1 Sistem Değişkenleri ve Denklikler 10

2.2.2 Sistemin Sınırları 12

2.2.3 Sistemdeki Denklik Sayısı 12

2.2.4 Sistem Mertebesi 14

2.3 Örnek Bir Modelleme 18

3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ 29

3.1 Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri 30

3.1.1 Sabit Fonksiyonlar 31

3.1.2 Basamak Fonksiyonu 32

3.1.3 Rampa Fonksiyonu 33
3.1.4 Üstel Fonksiyonlar 34
3.2 Laplace Dönüşümlerinde Toplam ve Çarpım Durumları 38
3.3 Son Değer Teoremi 38
3.4 İlk Değer Teoremi 39

4 TRANSFER FONKSİYONLARI 40
4.1 Gereksinimler 42
4.2 Blok Diyagramlar 43
4.3 İzin Verilen İşlemler 51
4.4 Çıkarımlar 53
4.4.1 Kararlılık 56
4.4.2 Salınım 58
4.4.3 Mertebe 58
4.4.4 Son Değer 59
4.4.5 Kararlı Hal Kazancı 59

5 DOĞRUSALLAŞTIRMA 63
5.1 Doğrusal Diferansiyel Denklem 63
5.2 Taylor Serisi 64

6 PROSES KONTROLÜ 74

6.1 Tasarım 75

6.2 Proses Değişkenleri.....78

6.3 Kontrol Yöntemleri 79

6.3.1 Geri Beslemeli Kontrol.....79

6.3.2 İleri Beslemeli Kontrol.....81

6.4 Kontrol Performansı Ölçütleri 83

7 GERİ BESLEMELİ KONTROL.....92

7.1 Oransal Kontrol.....92

7.2 İntegral Kontrol 94

7.3 Türevsel Kontrol 96

7.4 PID Kontrol 99

8 KONTROL SİMULASYONU 105

8.1 LabVIEW ile Simülasyon 105

8.2 Simulink ile Simülasyon.....114

KAYNAKLAR 123

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

"Rahmân ve Rahîm Olan Allâh'ın Adıyla,"

Âlemlerin Rabbi Allâh'a hamdolsun. Sevgili Peygamberimiz Muhammed'e salât ve selâm olsun. Yerde ve gökte sayısız prosesi olduran ve yöneten ilmin, kudretin ve mülkün sahibinin şanı ne yücedir. Bu çalışmayı tamamlamam için içimde ve dışımda gerekli bütün sistemleri var ettiği ve ayakta tuttuğu için O'na hamd ediyorum. Bu kitap proses kontrol alanında basılmış Türkçe kitapların bize göre çeşitli açılardan eksiklik ve fazlalığından hareketle yazılmıştır. Eksiklik, mevcut kitapların okuyucuların kendi kendine öğrenmelerini sağlamaya dönük olarak hazırlanmadığı ile ilgilidir. Konu anlatımlarının belirli bir ön bilginin olduğu varsayımından hareketle üst seviyeden olması veya sınırlı olması, verilen çözümlerin yeterince izah edilmemesi bizi bu düşünceye sevk etmiştir. Fazlalık ise konuların özden uzak detaylarla derinleştirilmesi ile ilgilidir. Bir eğitim dönemi içinde proses kontrolü derinlemesine işlemek mümkün değildir. Proses kontrole ilk adımı atmak isteyen mühendislerin veya mühendis adaylarının öncelikle öz bilgiyi almalarını ve genel çerçeveyi görmelerini sağlamanın daha yerinde olacağı kanaatindeyiz. Bu sebeplerden hareketle proses kontrolü temel seviyede, sade bir dil ve basit bir anlatımla ve başlangıç için gereksiz sayılabilecek detaylara girmeden anlattık. Okuyucular için Allah'tan zihin açıklığı diliyor, kitaptan istifâdelerinin yüksek olmasını temenni ediyorum.

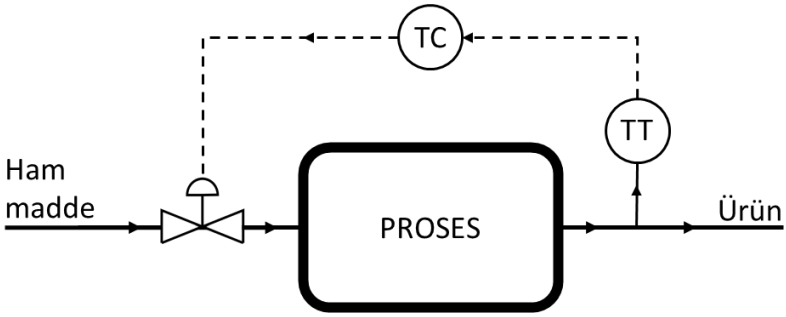
Dr. Âdem ZENGİN
Sakarya - 2022

1 GİRİŞ

Fiziksel, kimyasal ve mikrobiyolojik işlemlerle ham maddelerin ürünlere dönüşümüne **proses** denir. Pratikte, proses terimi hem proses işlemleri hem de proses ekipmanları için kullanılmaktadır.

Şekil 1.1. Basit bir proses şeması.

Bir fiziksel, kimyasal veya mikrobiyolojik sistemde belirlenmiş değişkenlerin ayarlanmasıyla hedeflenen şartların sürdürülmesine **kontrol** denir.



Şekil 1.2. Basit bir sıcaklık kontrol döngü diyagramı.

Proses kontrol ise belirli bir amacı gerçekleştirmek üzere yapılan iş ile ilgili verim, kalite ve güvenlik parametrelerinin izlenmesi, analiz edilmesi ve kontrol altında tutulmasıdır.

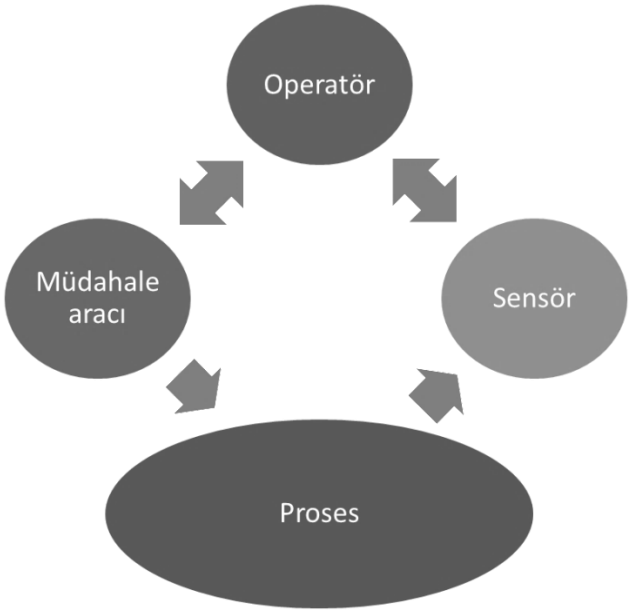
Şekil 1.2, basit bir geri beslemeli kontrol döngüsünü içermektedir. Sıcaklık proses çıkışında bir sensör ile kontrol edilmektedir. Ürün çıkış sıcaklığı istenen değerde değilse proses girişindeki kontrol vanasına müdahale edilmektedir. Daha hızlı veya daha yavaş ürün akışı sağlanarak hedeflenen değer sürdürülmeye çalışılmaktadır. Burada sıcaklığın kontrolü hem daha yüksek verim hem daha iyi kalite hem de daha güvenli bir üretim amacına dönük olabilir.

Proses kontrole çok çeşitli alanlarda çok çeşitli amaçlarla ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin bir deneyi gerçekleştirirken belirli parametrelerin sabit tutulmasında veya belirli bir aralıkta kalması gereken parametrelerin kontrolünde proses kontrole ihtiyaç duyulur. Bir üretim tesisinde değişen çevresel şartlara veya ham madde özelliklerine rağmen üretim kalitesini veya hızını belirli bir değerde tutmak için proses kontrol gereklidir. Bir prosesin herhangi bir aşamasında bir parametre tehlikeli bir yükselişe geçtiğinde hızlı ve doğru müdahalenin gerçekleştirilmesi için proses kontrole ihtiyaç vardır. Esnek bir üretim prosesinin tasarlanabilmesi ve otomatik hale getirilebilmesi için proses ekipmanlarına ilave olarak kontrol enstrümanlarının da proses tasarımı sırasında planlanması gerekir. Sonuç olarak proses kontrol bilgisi ve becerisi mühendisler için elzemdir.

1.1 Kontrol Sisteminin Temel Yapısı

Her kontrol sistemi temel olarak üç unsurdan meydana gelir. Bunlar sensör, operatör ve müdahale aracıdır. Bunların gerçekleştirdikleri üç temel eylem sırasıyla veri elde etmek, veri analizi yapmak ve prosese müdahale etmektir.

Sensörler proseste izlenmek istenen parametrelerin ölçümlerini gerçekleştirirler. Termometre, barometre, akış ölçer, pH metre, kamera ve gözler sensörlere örnektir.



Şekil 1.3. Proses kontrol döngüsü ve ana unsurlar.

Operatörün görevi sensörden aldığı veriyi işlemek, hesaplama yapmak, analiz etmek ve bir yargıya varmaktır. Operatörler için kontrolör veya kontrol edici ifadeleri de kullanılmaktadır. Operatör işlevini mantıksal işlem yapabilen bir sistem yerine getirebilir. Dolayısıyla operatör işlevini örneğin bir programlanabilir mantıksal denetleyici, bir bilgisayar veya bir insan yerine getirebilir. Şekil 1.3'te görüldüğü gibi operatör hem sensör ile hem de müdahale aracı ile etkileşim halindedir.

Müdahale aracı döngüdeki son kontrol elemanıdır. Operatörden gelen sinyale göre müdahalesini gerçekleştirir. Son kontrol elemanı için kullanılan simgesel ifade vanadır. Bu vana kimi zaman bir kütle akışını

kontrol eder, kimi zaman da elektrik akımını kontrol eder. Bazen sadece açık veya kapalı olmak üzere alabileceği sadece iki pozisyon vardır. Bazen de yüzde oran gibi belirli bir aralıkta değer alabilir.

1.2 Kontrol Sistemi Örnekleri

Proses kontrolü basit şekilde açıklamak için verilen örneklerin başında araç kullanımı gelir. Sürücüler direksiyonu kullanarak aracı kendi şeridinde tutmaya çalışırlar. Kontrol teriminin tanımında sözü edilen sistem bu örnekte aracın kendisidir. Belirlenmiş değişken aracın iki şerit çizgisi arasındaki konumudur. Sürdürülmek istenen şart şeridin ortasından yol almaktır. Bu sistemdeki temel kontrol unsurları; sürücünü gözleri (sensör), sürücünün beyni (operatör) ve aracın direksiyonu (müdahale aracı) olarak sayılabilir. Otonom bir araç geliştirilmek istenirse kontrol için ihtiyaç duyulan bu enstrümanların sağlanması gerekir. Gelişen teknolojiye bağlı olarak bazı işlemleri siber fiziksel sistemler (robotlar) insanlardan daha iyi yapabilmektedir. Araçlar için bugün çok sayıda otomatik kontrol sistemleri geliştirilmiştir. Bunlara örnek olarak otomatik şanzıman, otomatik klima ve hız sabitleyici örnek olarak verilebilir.

Proses kontrole hayatın içinden verilen örneklerden bir diğeri de evlerin ısıtılmasında oda termostatı ile kullanılan kombi sistemleridir. Oda sıcaklığı, belirlenen bir değerin altına düştüğünde bir elektronik beyin tarafından kombi aktif hale getirilir. Oda sıcaklığı şayet belirlenen bir değerin üzerine çıkarsa bu defa elektronik beyin tarafından kombi pasif hale getirilir. Kontrol teriminin tanımında sözü edilen sistem bu örnekte evin kendisidir. Belirlenmiş değişken, termostat yerleştirilmiş odanın sıcaklığıdır. Sürdürülmek istenen şart, oda sıcaklığını belirli bir aralıkta tutmaktır. Bu sistemdeki temel kontrol enstrümanları; oda termostatı

(sensör), elektronik beyin (operatör) ve kombiye gaz akışı sağlayan vanadır (müdahale aracı).

1.3 Proses Kontrolün Hedefleri

Proses kontrolün temel hedefleri proses kontrolün tanımında verim, kalite ve güvenlik olarak verilmişti. Güvenlik burada öncelikli hedeftir. Verim ve kalite hedefleri güvenliğin sağlanabildiği sınırlar içinde uygulanabilir. Güvenlik riski doğuracak verim ve kalite hedefleri tayin edilemez.

Güvenlik, kendi içinde çeşitli alt bileşenlere sahiptir. Bunlar arasında personel güvenliği, fabrikanın içinde bulunduğu bölge halkının güvenliği, çevre güvenliği, makine güvenliği, fabrika güvenliği ve ürün güvenliği sayılabilir.

Fabrikaların ve makinelerin güvenli bir şekilde çalışmalarını sürdürebilecekleri çalışma şartları vardır. Sıcaklık, basınç, asitlik ve nem gibi faktörlerin güvenli aralıklarda tutulması gerekir. Tasarım hatası, kontrolsüz veya uygunsuz bir işlem bu faktörlerin aşırı yükselmesine veya düşmesine sebep olabilir. Bunun sonucunda arıza, patlama, yangın ve sızıntı gibi sonuçlar ortaya çıkabilir. Proses kontrol bu faktörleri güvenli aralıklarda tutmak için başvurulan temel güvenlik katmanıdır.

Güvenlik önlemleri bir hiyerarşik yapı içerisinde katman katman tasarlanır. Birinci katmanı proses kontrol uygulamaları oluşturur. Proses kontrolün başarısız olması durumunda sırasıyla alarm sistemleri, tahliye sistemleri ve acil durum aksiyonları gibi üst katmanlar devreye girer. Bu hiyerarşik yapı içinde en önemli katman proses kontrol katmanının olduğu ilk katmandır.

Kalite hedeflerini tutturmak proses kontrolün rol oynadığı bir diğer amaçtır. Ürün kalitesini etkileyecek birçok parametre vardır. Ham madde özellikleri, çevresel şartlar ve proses şartları bunların başında gelir. Renk, koku, lezzet, sertlik derecesi, besin değeri, hijyen, kimyasal yapı, raf ömrü gibi kalite özelliklerinin tutturulması bu özellikleri etkileyebilecek parametrelerin kontrol altında tutulmasına bağlıdır.

Verim, proses kontrolün rol oynadığı üçüncü genel başlıktır. Verim hedefleri arasında, istikrarlı fabrika işletimi, istikrarlı üretim miktarı ve kâr optimizasyonu sayılabilir. Üretimler birçok makinenin veya prosesin eş zamanlı veya ardışık çalışması sonucunda gerçekleştirilmektedir. Bu aşamalardan birinde sorun çıkması durumunda diğer aşamalar da bundan etkilenmektedir. Proses kontrol sorunları azaltarak üretimin daha istikrarlı sürdürülmesine katkı sağlar. Proses kontrol diğer taraftan kâr optimizasyonuna yardımcı olur. Bir proseste örneğin ham maddeyi buharı, basıncı veya sıcaklığı yeter derecede kullanmak enerji tasarrufu sağlar. Bu ise proses kontrol ile mümkün olabilir.

2 MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel modelleme proses kontrol için önemli bir temel teşkil eder. Modelleme bir proses dinamiğinin anlaşılmasını sağlar. Dinamik davranışı anlaşılmamış bir prosesin kontrol edilebilmesi mümkün olmaz. Örneğin güvenli bir sürüş için aracın dinamiklerinin bilinmesi elzemdir. Manuel araçlar için hangi eğimde hangi vitesin kullanılacağı, hangi viraja hangi hızla girilebileceği, virajı dönmek için direksiyona hangi yönde ne ölçüde müdahale edileceği gibi basit veya daha karmaşık birçok hesaplama ve karar sürüş sırasında beyinde gerçekleşmektedir. Tecrübe ve bilgiyle birlikte beyinde iyi modeller oluşmuşsa sürücü aracın kontrolünü kaybetmez ve güvenle yoluna devam eder.

Proses endüstrisinde cevabı aranan bazı sorulara modelleme ile cevap verilebilir. Örneğin bir tankerden nakledilen sütün ne kadar sürede boşaltılacağına modelleme ile cevap verilir. Sütten ne kadar peynir veya krema üretilebileceğine yine model kullanılarak cevap verilebilir.

Bu bölümde kütle-enerji denklikleri gibi temel prensiplere dayalı doğrusal proseslerin dinamik modelleri geliştirilerek çözülecektir. Ayrıca modeller analiz edilerek, dinamik davranışa etki eden parametreler belirlenecektir. Doğrusal olmayan prosesler ise başka bir bölümde incelenecektir.

2.1 Modellemede Hedef Belirleme

Proses modellemede hedef belirlerken şu sorular üzerinden gidilebilir:

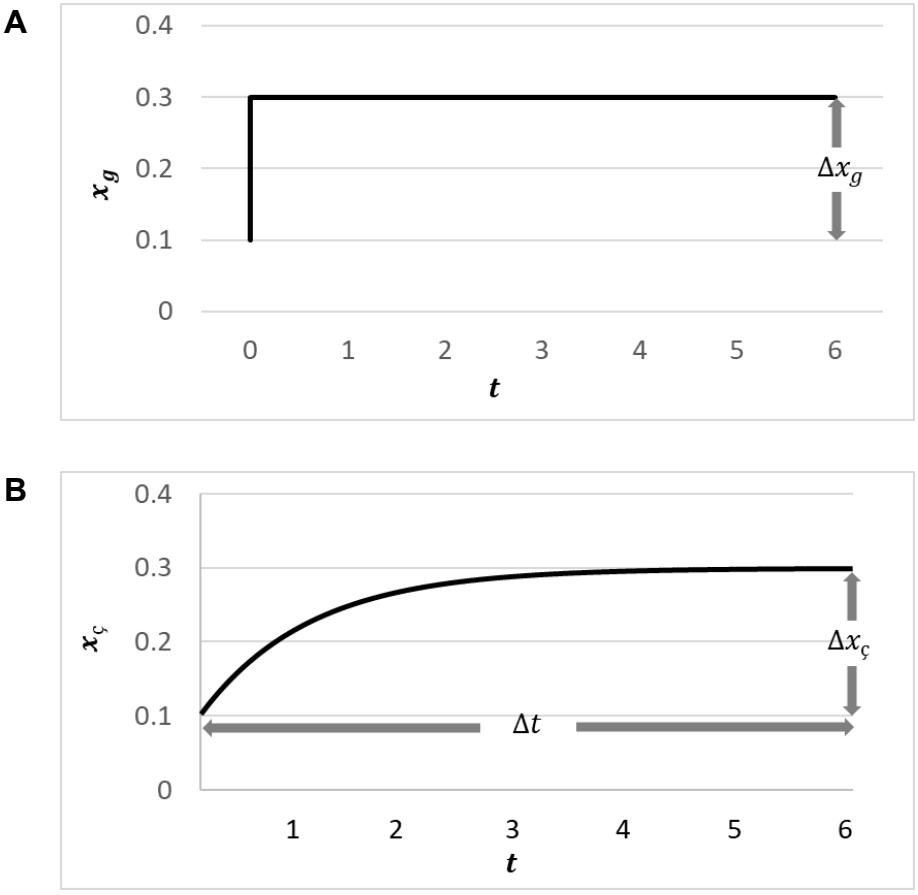
- Yapılacak modelleme hangi konuda karar verilmesine yardımcı olacak?
- Ne hesaplanmaya/tahmin edilmeye çalışılıyor?
- Bu hesaplama/tahmin prosesin neresinde yapılmak isteniyor?
- Hangi parametrenin hesaplanması gerekiyor?

Bu sorulara verilen cevaplar etrafında bir hedef tayin edilmiş olacaktır. Örneğin amaç, bir prosesin girdisinde bir basamaklık artış yapıldığında çıktıda yaşanacak değişimin davranışını hesaplamak olabilir. Belirli bir zaman aralığında çıktıdaki değerler hesaplanıp grafiğe döküldüğünde prosesin basamak artışına verdiği tepki hakkında fikir sahibi olunabilir ve yorum yapılabilir. Şekil 2.1'de modellenen bir prosesin basamak artışına verdiği tepki gösterilmiştir.

Bir proses ile ilgili bilmek isteyebileceğimiz bilgilerden ilki başlangıç ve son kararlı hal arasında ne kadarlık bir sapma meydana geleceğidir. Proses girdisinde (x_g) örneğin Şekil 2.1 A'da görüldüğü gibi 0.2'lik bir basamak değişimi ($\Delta x_g = 0.2$) yaşanmıştır. Girdideki 0.2'lik sapmanın proses çıktısında ($x_ç$) son durumda ne kadarlık bir sapmaya ($\Delta x_ç$) sebep olacağını bilmek önemlidir. Bir başka önemli bilgi başlangıç halinden son kararlı hale geçiş hızı olabilir. Şekil 2.1 B'de başlangıç halinden son kararlı hale geçişin tamamlanması sürecinde ne kadar zaman geçtiği (Δt) görülebilmektedir.

Bir proses için elde edilen model ayrıca başlangıç ve son hal arasındaki değişimin davranışının kararlılığı veya salınımlılığı hakkında da bilgiler verecektir. Şekil 2.1 B'de modellenen proses parametresinin 0.3

değerinde kararlılığa eriştiği görülmektedir. Ayrıca başlangıç ve son hal arasındaki değişimin salınımlı özellikte olmadığı da anlaşılmaktadır.



Şekil 2.1. Bir prosesin girdisinde (x_g) meydana gelen basamak artışı (A) ve buna karşı proses çıktısında ($x_ç$) oluşan değişimin (B) zamana bağlı davranışı.

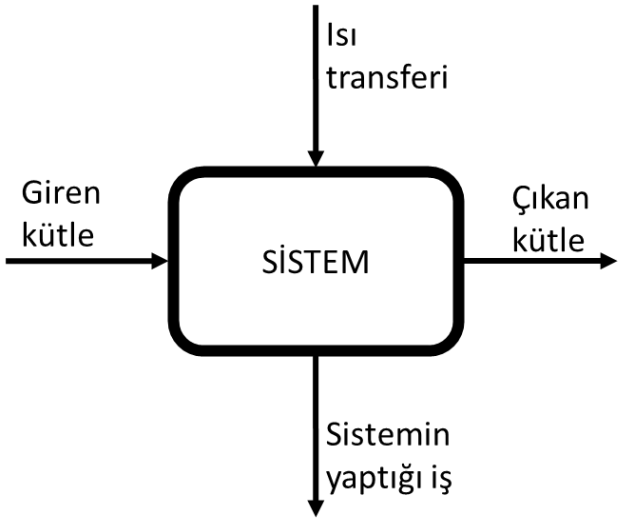
2.2 Modellemede Metot

Bir modelleme problemine yaklaşırken öncelikle hangi değişken (basınç, sıcaklık vb.) ve hangi denklik (kütle, enerji vb.) ile ilgilenildiği düşünülmelidir. Daha sonra sistemin sınırları, sistemin mertebesi,

denklik sayısı ve diğer yapısal ilişkilerin varlığı gibi hususlar değerlendirilir.

2.2.1 Sistem Değişkenleri ve Denklikler

Sistemde değişen unsurları belirlemek sistemi tanımak için gereklidir. Sisteme giren kütle, sistemi terk eden kütle, sisteme olan ısı transferi ve sistemin yaptığı iş temel değişim unsurlarıdır. Şekil 2.2'de açık bir sistemin bazı girdileri ve çıktıları gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Açık bir sistemde enerji giriş ve çıkışları.

Açık bir sistemdeki enerji birikiminin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$Enerji\ Birikimi = kütle\ girişi - kütle\ çıkışı + Q - W \qquad (2\text{-}1)$$

Proses kontrol için yapılacak modellemelerde daha çok toplam kütle denkliği, bileşen kütle denkliği ve enerji denkliği kullanılacaktır. Tablo 2.1

bazı değişken türlerini ve bunların ilişkili olduğu denklikleri göstermektedir.

Tablo 2.1. Proses kontrolde kullanılan başlıca değişkenler ve hesaplama için gerekli denklik türleri.

Başlıca Değişkenler	**Denklik Türü**
Ağırlık	Toplam kütle denkliği
Sıvı Seviyesi	
Katı Seviyesi	
Kapalı bir tanktaki basınç	
Konsantrasyon	Bileşen kütle denkliği
Ağırlıkça yüzde	
Molar yüzde	
Sıcaklık	Enerji denkliği

Kararlı hal prosesleri birikimin veya değişimin olmadığı proseslerdir. Kararlı hal problemleri bu yönleriyle proses tasarımı problemleridir ve cebirsel denklemlerle çözülmektedir. Proses kontrol problemleri ise dinamik sistemleri ihtiva ederler ve diferansiyel denklemler ile çözülebilirler. Dolayısıyla burada kararlı olmayan proseslerin matematiksel modellemesi üzerinde durulacaktır.

2.2.2 Sistemin Sınırları

Bir sistemin sınırları sistemdeki değişkenler belirlendikten sonra tespit edilir. Çünkü bir değişkenin sistemin farklı bölgelerinde değişmemesi gerekir. Örneğin eğer bir tank, sistem olarak seçilmiş ise sıcaklığın veya kompozisyonun tank içerisinde her yerde aynı olması gerekir. Tank içerisinde bir bölge, sistem olarak seçilebileceği halde tüm tankın sistem olarak seçilmesi denge denkliklerinin kurulabilmesine imkan sağlaması bakımından daha elverişlidir.

2.2.3 Sistemdeki Denklik Sayısı

Bir sistemdeki denklik sayısı teorik olarak limitsizdir. Burada amaç tanımlanmış bağımlı değişken(ler)i çözmede kullanılacak bir model geliştirmektir. Yaklaşık değil tam bir çözüm için serbestlik derecesi (*Degree of Freedom*, DOF) sıfır olan bir modele ihtiyaç vardır. DOF aşağıdaki denklik ile ifade edilmektedir.

$$DOF = BağımlıDeğişkenSayısı - BağımsızDenklikSayısı \quad (2\text{-}2)$$

Denklik sayısı mümkün olduğunca artırılarak serbestlik derecesinin sıfır olması sağlanmaya çalışılır. Burada gereksiz ve ilgisiz denklemlerin kullanılması elbette bir fayda sağlamaz. Eğer denklem sayısı serbestlik derecesini sıfırlamıyor ise bu noktada ilave denklemlere ve yapısal ilişkilere başvurulabilir.

Yapısal ilişkiler tam çözüme götürmeyen, her zaman her yerde doğru sonuç vermeyen ancak faydalanılan ilişkilerdir. Isı transferi için kullanılan aşağıdaki denklem örnek olarak verilebilir.

$$q = hA(T - T_c) \tag{2-3}$$

Bu denklemler, denklemdeki parametreler ve katsayılar deneysel verilerle geliştirildikleri için sınırlı şartlarda uygulanabilen, geçerli olabilen ilişkilerdir. Bir sistem için kurulan denklikte serbestlik derecesi sıfıra eşit olmadıysa, yani denklem sayısı eksik kaldıysa, sözü edilen yapısal denklemlere başvurulabilir.

ÖRNEK 2.1

x ve y bir sisteme ait değişkenler olsun. Aşağıda verilen denklemlerin tam bir çözüm için yeterliliğini sorgulayınız. Yeterlilik varsa çözüme gidiniz.

$2x + y = 20$

$3x - y = 5$

ÇÖZÜM

Serbestlik Derecesi Analizi

Burada bilinmeyen sayısı ve denklem sayısı ikidir. Serbestlik derecesi DOF hesaplanırsa

$DOF = BağımlıDeğişkenSayısı - BağımsızDenklikSayısı$

$DOF = 2 - 2 = 0$

DOF sıfıra eşit olduğu için tam çözüm mümkündür.

Çözüm

İkinci denklem yeniden düzenlenir ve y elde edilir.

$y = 3x - 5$

Elde edilen bu y ifadesi birinci denklemdeki y'nin yerine yazılır. Gerekli işlemler yapılarak önce x sonra y değeri bulunur.

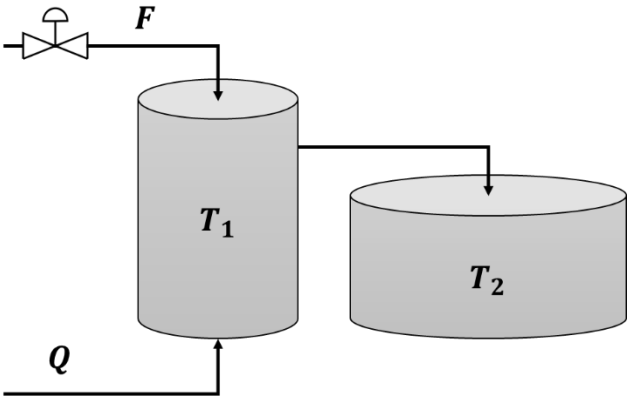
$2x + 3x - 5 = 20$

$x = 5$

$y = 10$

2.2.4 Sistem Mertebesi

Birbirine etki eden sistemler veya prosesler ayrı ayrı ele alındıklarında sistem birinci mertebeden olur. Ancak örneğin iki prosesten birinin çıktısı diğerinin girdisini oluşturuyor ve ilk girdinin son çıktıya etkisi modellenmek isteniyorsa bu sistem ikinci mertebeden bir sistemdir.



Şekil 2.3. T_2 sıcaklığı ve F debisi arasındaki ilişkiyi gösteren ikinci mertebeden bir sistem.

Şekil 2.3'te örneğin F ve T_1 arasındaki ilişki modellenmek istenirse sistem sınırları birinci tanktan oluşur ve sistem birinci mertebeden olur. F ve T_2 arasındaki ilişki modellenmek istenirse her iki tank sistem sınırları içine girer ve sistem ikinci mertebeden olur.

Birinci mertebe sistemlerdeki dinamik prosesler birinci dereceden diferansiyel denklemler ile modellenir. Bu denklemlerin çözümü için başvurulan yöntemler arasında integral çarpanı yöntemi, Laplace dönüşümü ve nümerik çözüm yöntemleri vardır. Nümerik çözüm yöntemi bu kitabın kapsamı dışındadır. Laplace dönüşümü yöntemi kitabın üçüncü bölümünde verilmiştir. İntegral çarpanı yöntemi denklem (2-4)'te verilen kalıba uyan diferansiyel denklemler için uygulanabilir.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2-4}$$

Burada türevli ifadenin katsayısı 1'dir. y değişkeni eşitliğin solunda ve katsayısı $p(x)$'dir. Öncelikle çözülmek istenen diferansiyel denklem eğer uyabiliyorsa bu kalıba uydurulur. Sonra bu denklem için integral çarpanı I elde edilir.

$$I = e^{\int p(x)dx} \tag{2-5}$$

Denklemin her iki tarafı integral çarpanı ile çarpılır.

$$I \times \left[\frac{dy}{dx} + p(x)y\right] = I \times g(x) \tag{2-6}$$

$I \times \left[\frac{dy}{dx} + p(x)y\right] = \frac{d[I \times y]}{dx}$ olduğu için denklem (2-6) yeniden düzenlenir.

$$\frac{d[I \times y]}{dx} = I \times g(x) \tag{2-7}$$

Her iki tarafın integrali alınır ve y elde edilir.

$$\int \frac{d[I \times y]}{dx} = \int I \times g(x)$$

$$[I \times y] = \int I \times g(x) \tag{2-8}$$

$$y = \frac{\int I \times g(x)}{I}$$

ÖRNEK 2.2

$2\frac{dy}{dx} + y = 5$ diferansiyel denklemini integral çarpanı yöntemi ile çözünüz.

Not: $y = f(x)$ ve $f(0) = 0$

ÇÖZÜM

Verilen denklem önce kalıba uydurulur. Bunun için tüm terimler 2'ye bölünür.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = \frac{5}{2}$$

Burada $p(x) = 1/2$'dir. İntegral çarpanı hesaplanır.

$I = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2}dx} = e^{x/2}$

Her iki taraf integral çarpanı ile çarpılır.

$$e^{x/2}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2}\right]=\frac{5e^{x/2}}{2}$$

$$\frac{d(e^{x/2}y)}{dx}=\frac{5e^{x/2}}{2}$$

$$\int\frac{d(e^{x/2}y)}{dx}=\int\frac{5e^{x/2}}{2}$$

$$e^{x/2}y=\frac{5\times 2e^{x/2}}{2}+C$$

$$y=\frac{5\times 2e^{x/2}}{2\times e^{x/2}}+\frac{C}{e^{x/2}}$$

$$y=5+C(e^{-x/2})$$

$$y=f(x)=5+C(e^{-x/2})$$

Burada C'yi bulmak için $f(0)$ değeri kullanılır.

$$5+C(e^{0})=0$$

$$C=-5$$

Şimdi C denklemde yerine yazılır.

$$y=f(x)=5-5(e^{-x/2})$$

$$y=f(x)=5(1-e^{-x/2})$$

2.3 Örnek Bir Modelleme

ÖRNEK 2.3

Bir karıştırmalı tank içinde 0.1 kütlesel oranında A bileşeni vardır. Tank içindeki yoğunluk 800 kg/m^{3}'tür ve değişmemektedir. Tankın hacmi 2.4 m^3, besleme ve tahliye hızı 20 kg/dk'dır. Başlangıçta sistem dengededir. Yani besleme, tahliye ve tank içindeki A bileşeni oranları 0.1'dir. Besleme girdisindeki A bileşeni oranı aniden 0.3'e yükseltilmektedir. Sistemin çok iyi karıştığı, yoğunluğun tank içinde değişmediği, akışın sabit hızda olduğu, tank hacminin değişmediği, besleme ve tahliye debisinin eşit olduğu varsayımları mevcuttur. Besleme girdisindeki A bileşeni oranında meydana gelen bu basamak değişimine sistemin verdiği dinamik yanıt ne olur? Bir başka ifade ile tank içindeki veya tahliyedeki A bileşeni oranının zamana bağlı değişimi nasıl gerçekleşir?

ÇÖZÜM:

Burada modelleme yapılarak çözüme gidilmesi gerekir. Bir modelleme problemine yaklaşırken değişkenin ne olduğu, hangi denkliğin kullanılacağı ve sistemin sınırlarının ne olduğu belirlenir. Burada değişken, tank içindeki veya tank çıkışındaki A bileşeni oranıdır. Kullanılacak denklik, bileşen kütle denkliğidir. Sistemin sınırları ise konsantrasyonun her yerde aynı olduğu tanktır.

Burada kimyasal reaksiyon olmadığı ve sadece karıştırma işlemi olduğu için bileşen kütle denkliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Birikim = giriş - çıkış$$

$$\left(\rho V x_{ç}\right)_{t+\Delta t} - \left(\rho V x_{ç}\right)_{t} = \left(F x_{g} - F x_{ç}\right)\Delta t \qquad (2\text{-}9)$$

Burada

ρ: Tank içindeki yoğunluk

V: Tankın sabit hacmi

$x_{ç}$: A bileşeninin tank içindeki ve tank çıkışındaki kütlesel oranı

x_{g}: Giriş hattındaki A bileşeninin kütlesel oranı

F: Birbirine eşit olan besleme ve tahliye debisi

t: Zaman

Δt: Bir zaman aralığıdır.

Bu problemde zamana bağlı olarak değişecek olan parametreler $x_{ç}$ ve x_{g}'dir. Bunların başlangıç kararlı hal değerleri üst çizgi işaretiyle gösterilecektir.

$\overline{x_{ç}}$: Başlangıç kararlı halde A bileşeninin tank içindeki ve tank çıkışındaki kütlesel oranı.

$\overline{x_{g}}$: Başlangıç kararlı halde giriş hattındaki A bileşeninin kütlesel oranı.

Örnekte verilen değerler aşağıdaki gibidir.

ρ= 800 kg/m^3

V= 2.4 m^3

F= 20 kg/dk

$\overline{x_{ç}}$= 0.1

$\overline{x_g}$= 0.1

$x_g(0)$= 0.3

$x_ç(t)$= ?

Değişim anı zamanda sıfır noktası olarak kabul edildiği için $x_g(0) = 0.3$ olarak yeni değerini almış oldu. Bu bazı kitaplarda $x_g(0^+)$ olarak gösterilmektedir. Bu problemde bulunması istenen terim $t \geq 0$ için $x_ç(t)$ değeridir.

Denklem (2-9)'da eşitliğin her iki tarafı Δt'ye bölünür ve $\Delta t \to 0$'a giderken limit alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d(\rho V x_ç)}{dt} = F x_g - F x_ç \tag{2-10}$$

Böylece sistemi tanımlayan birinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilmiş oldu. Burada ρ ve V sabit oldukları için türevin dışına alınabilir.

$$\rho V \frac{dx_ç}{dt} = F x_g - F x_ç \tag{2-11}$$

Bu denklem tüm zamanlar için geçerli bir denklemdir. Örneğin denklemi başlangıç şartları için yazarsak şöyle ifade edebiliriz:

$$\rho V \left[\frac{dx_ç}{dt}\right]_b = F\overline{x_g} - F\overline{x_ç} \tag{2-12}$$

Başlangıçta sistem kararlı halde, dengede olduğu için herhangi bir değişim olmaz ve türev terimi sıfıra eşit olur. Eşitliğin diğer tarafının da sıfıra eşit olduğu doğrulanabilir. Başlangıçta besleme ve tahliye hatlarındaki A bileşeninin kütlesel oranları aynı idi. Debiler de aynı olduğuna göre eşitliğin sağ tarafının da sıfıra eşit olduğu görülür. Denklem (2-12), denklem (2-11)'ten çıkarılırsa diferansiyel denklem, sapma değişkenleri formunda elde edilir.

$$\rho V \frac{dx'_{ç}}{dt} = Fx'_{g} - Fx'_{ç} \tag{2-13}$$

Buradaki sapma, başlangıç durumu ile bir t anındaki durum arasındaki farkı ifade eder. Sapma değişkenleri kesme işaretiyle gösterilmektedir.

Birinci dereceden diferansiyel denklemle tanımlanan bir dinamik sistem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_p x' \tag{2-14}$$

Buradaki τ zaman sabitidir[1]. K_p ise kararlı hal proses kazancıdır. x' sapma değişkeni formatındaki girdiyi, y' ise sapma değişkeni formatındaki çıktıyı temsil etmektedir. Denklem (2-13), denklem (2-14) formunda yazılırsa yukarıdaki dinamik sistem için zaman sabiti (τ) ve kararlı hal proses kazancının (K_p) değerleri bulunabilir.

[1] Zaman sabiti sistem tasarımıyla ilgili karakteristik bir özelliktir ve sistemde meydana gelen değişimin hızına etki eder. Örneğin zaman sabiti farklı olan iki karıştırmalı tank sisteminde zaman sabiti büyük olan sistemde girdideki konsantrasyon değişimi tank içine daha yavaş sirayet eder. Bir başka ifade ile τ, zamanın çok küçük bir anında (dt) sistemin değişime karşı göstereceği atalettir.

$$\rho V \frac{dx'_{ç}}{dt} + F x'_{ç} = F x'_{g} \tag{2-15}$$

y' teriminin katsayısını 1'e eşitlemek için tüm terimler F'ye bölünür.

$$\frac{\rho V}{F} \frac{dx'_{ç}}{dt} + x'_{ç} = x'_{g} \tag{2-16}$$

Bu durumda $\tau = \frac{\rho V}{F}$ ve $K_p = 1$ olduğu görülür. τ'nin bu formülü bu modele özgüdür. Başka problemlerde farklı modeller için bu formül değişecektir. Aynı şekilde K_p'nin değeri bu probleme özgüdür. Denklem (2-16), τ ve K_p değerleriyle yeniden yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\tau \frac{dx'_{ç}}{dt} + x'_{ç} = K_p x'_{g} \tag{2-17}$$

Modelleme probleminin çözümünde bu noktada serbestlik derecesi (DOF) sorgulanabilir. Burada bağımlı değişken sadece $x_{ç}$'dır. Bir bilinmeyen değişkene karşılık bir eşitlik mevcut olduğu için $DOF = 1 - 1 = 0$'dır ve tam çözüme gidilebilir.

Burada x_g girdi değişkeni idi ve bir anda 0.1'den 0.3'e yükselmekte idi. Problem çözümlerinde değişimin olduğu an $t = 0$ ânı olarak kabul edilir. Bu durumda $t \geq 0$ için herhangi bir t anında $x_g(t)$'nin değeri 0.3 ve $x'_g(t)$'nin değeri 0.3-0.1=0.2 olarak sabit kalacaktır.

Denklem (2-17) diferansiyel denklemi için integral çarpanı yöntemi ile çözüme gidilir. İntegral çarpanı yöntemi için kullanılan kalıp ifadeye göre

(denklem (2-4)) türevi alınan terimin katsayısının 1'e eşit olması gerekir. Bunun için denklem (2-17)'deki tüm terimler τ ile bölünür.

$$\frac{dx'_{ç}}{dt} + \frac{x'_{ç}}{\tau} = \frac{K_p x'_g}{\tau} \tag{2-18}$$

Burada $p(x)$'in $\frac{1}{\tau}$ olduğu görülür. İntegral çarpanını bulmak için $e^{\int p(x)dx}$ işleminin yapılması gerekir.

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{\tau} dt} = e^{\frac{t}{\tau}} \tag{2-19}$$

Denklem (2-18) integral çarpanı ile çarpılır ve diğer işlemler aşağıdaki gibi yürütülür.

$$\begin{gathered} e^{\frac{t}{\tau}} \frac{dx'_{ç}}{dt} + e^{\frac{t}{\tau}} \frac{x'_{ç}}{\tau} = e^{\frac{t}{\tau}} \frac{K_p x'_g}{\tau} \\ \int d\left(e^{\frac{t}{\tau}} x'_{ç}\right) = \frac{K_p x'_g}{\tau} \int e^{\frac{t}{\tau}} dt \\ e^{\frac{t}{\tau}} x'_{ç} = \frac{K_p x'_g}{\tau} \tau e^{\frac{t}{\tau}} + C \\ x'_{ç} = K_p x'_g + C\left(e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \end{gathered} \tag{2-20}$$

Burada C sabiti başlangıç değeri bilinen bir sistem için hesaplanabilir. Sistem başlangıçta kararlı halde ise $t = 0$ için $x'_{ç}(0) = 0$ olur. Bu sıfır noktası x_g'de değişimin olduğu andır. Dolayısıyla bu noktada aslında $x'_g = \Delta x_g = 0.2$'dir. Bu durumda C sabiti aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$x'_{ç}(t) = K_p x'_g + C\left(e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

$$x'_{ç}(0) = K_p x'_g + C\left(e^{\frac{0}{\tau}}\right) \qquad (2\text{-}21)$$

$$C = -K_p x'_g$$

C sabiti denklem (2-20)'de yerine yazılırsa diferansiyel denklemin tam çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$x'_{ç}(t) = K_p x'_g\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad (2\text{-}22)$$

Bu şekilde bazı örnek diferansiyel denklem çözümleri yapmak proses dinamiğinin anlaşılmasına katkı sağlama amaçlıdır. τ ve K_p'nin değeri denklem (2-16) kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\tau = \frac{\rho V}{F} = \frac{800\,kg/m^3 \cdot 2.4m^3}{20\,kg/dk} = 96dk$$

$$K_p = 1 \qquad (2\text{-}23)$$

Şimdi farklı τ değerleri için $x'_{ç}(t)$ değerleri denklem (2-22) kullanılarak hesaplanabilir. Ayrıca başlangıç durumu bilindiği için $x_{ç}(t)$ değerleri de hesaplanabilir. Bu bir hesap tablosu programı ile kolayca yapılabilir.

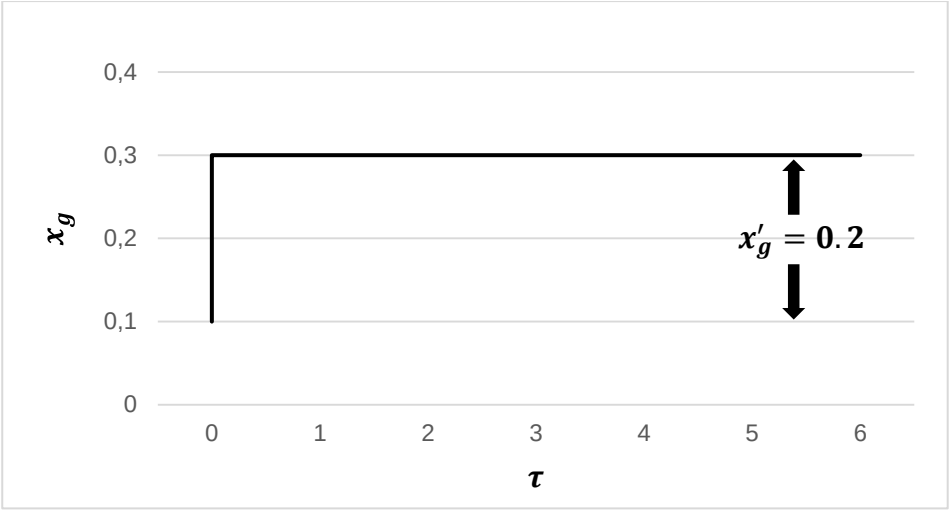
Tablo 2.2, tanktaki giriş hattında $t = 0$ anında A bileşeninin konsantrasyonu değiştikten sonra tank içinde meydana gelen değişimlerin hesaplamalarını vermektedir. İkinci sütun değişim miktarını, üçüncü sütun konsantrasyon değerini ve dördüncü sütun ise her bir τ

döngüsünde yaşanan dönüşümün yaşanacak toplam dönüşüm içindeki oranını vermektedir.

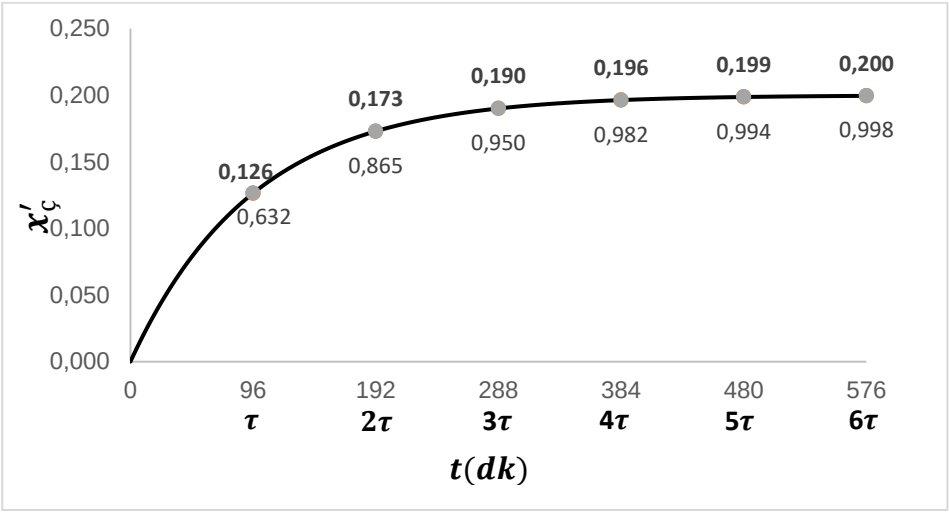
Şekil 2.4, giriş hattındaki A bileşeninin konsantrasyonundaki basamak değişimini göstermektedir. Konsantrasyon 0.1'den 0.3'e yükselmiş ve 0.3'te sabit kalmıştır. Böylece değişim $x'_g = 0.2$ olmuş ve sabit kalmıştır.

Tablo 2.2. Farklı τ noktaları için hesaplanmış $x'_ç(t)$, $x_ç(t)$ ve $x'_ç(t)/K_p x'_g$ değerleri.

$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{t(dk)}$	$\boldsymbol{x'_ç(t)}$	$\boldsymbol{x_ç(t) = \overline{x_ç} + x'_ç(t)}$	$\boldsymbol{x'_ç(t)/K_p x'_g}$
0	0	0	0.1	0
τ	96	0.1264	0.2264	0.6321
2τ	192	0.1729	0.2729	0.8647
3τ	288	0.1900	0.2900	0.9502
4τ	384	0.1963	0.2963	0.9817
5τ	480	0.1987	0.2987	0.9933
6τ	576	0.1995	0.2995	0.9975
∞	∞	0.2	0.3	1.0



Şekil 2.4. Giriş hattındaki A bileşeninin konsantrasyonundaki basamak değişimi.



Şekil 2.5. A bileşeninin tank içindeki veya tank çıkışındaki konsantrasyonundaki değişimin zamana bağlı davranışı. Eğri üzerindeki değerler değişim miktarını, altındaki değerler ise o anki değişimin yaşanacak toplam değişime oranını göstermektedir.

Şekil 2.5, A bileşeninin tank içindeki veya tank çıkışındaki konsantrasyonunda meydana gelen değişimin zamana bağlı davranışını göstermektedir. Giriş konsantrasyonunda meydana gelen basamak

değişiminin tank içine veya çıkışına nasıl etki ettiği eğriye bakılarak anlaşılabilmektedir. Değişim ilk anlarda hızla yaşanırken ilerleyen zamanlarda değişim yavaş seyretmektedir. Bu problemde $\tau = \frac{\rho V}{F}$ olduğu için örneğin tank hacmi daha küçük olsaydı tank içindeki A bileşeni konsantrasyonunun daha az zamanda 0.3'e yaklaşacağı söylenebilirdi. Zaman sabitinin 96 dk olduğu bu problemde 96 dk sonunda yaklaşık %63'lük, 192 dk sonunda yaklaşık %87'lik ve 288 dk sonunda yaklaşık %95'lik bir değişimin yaşandığı görülmektedir. Bu noktadan sonraki değişimlerin çok yavaş seyrettiği de ayrıca not edilmelidir. Burada Y ekseni değişimin boyutuna dair fikir verirken X ekseni ise değişimin hızına dair fikir vermektedir.

$t \to \infty$ için denklem (2-22) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x'_{ç}(\infty) = K_p x'_g \tag{2-24}$$

Burada K_p yalnız bırakılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{x'_{ç}(\infty)}{x'_g} = \frac{x_{ç}(son) - x_{ç}(ilk)}{x_g(son) - x_g(ilk)} = K_p \tag{2-25}$$

Dolayısıyla kararlı hal kazancı K_p doğrusal proseslerde, başlangıç şartlarından bağımsız olarak sabittir. Zaman sabitinin birinci basamağında yani 96 dk içinde yaklaşık %63'lük (0.63) bir değişim olmaktadır. Bu oran denklem (2-22)'nin aşağıdaki teriminden ortaya çıkmaktadır.

$$\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \tag{2-26}$$

Dolayısıyla örneğin ilk 96 dk içinde meydana gelen değişim miktarı $x'_{ç}(1\tau)$, $0.63 \times K_p \times x'_g$ hesaplaması ile bulunabilir. Bu hesaplama denklem (2-22) ile yapılan hesaplama ile birebir aynıdır. Yine burada Y ekseni ile ilişkili olan K_p'nin proseste meydana gelecek değişimin boyutuna dair fikir vereceğini, τ'nin ise bu değişimin hızına dair fikir vereceğini not etmek gerekir. Bu örnekte K_p'nin 1'e eşit olduğu görülmektedir. Bunun anlamı $t \to \infty$ için giriş ve çıkış konsantrasyonlarının eşitlenecek olmasıdır.

Bu örnek çözümü ile bir proseste meydana gelebilecek basamak değişimine karşı prosesin nasıl bir dinamik değişim davranışı ortaya koyacağı gösterilmiş oldu.

3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Dinamik prosesleri modellemek için diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Laplace dönüşümü, bir diferansiyel denklemi cebirsel denkleme integral yardımıyla dönüştürerek çözümünü kolaylaştırmaktadır. Laplace dönüşümleri ile diferansiyel denklem çözmek için iki şartın sağlanması gerekir.

1. Diferansiyel denklemin doğrusal olması gerekir. Yani y ve $\frac{dy}{dt}$'li (yani türevli) ifadelerin katsayılarının sabit sayı olması gerekir. Bu konuya kitaptaki 5.1 numaralı konu başlığında değinilmiştir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler önce doğrusallaştırılır ve sonra Laplace dönüşümü ile çözülmeye çalışılır. Doğrusallaştırma konusu kitapta 5.2 numaralı başlıkta ele alınmıştır.
2. Başlangıç şartlarının biliniyor olması gerekir. Yani birinci dereceden diferansiyel denklem için $y(0)$, ikinci dereceden diferansiyel denklem için hem $y(0)$ hem de $y'(0)$ değerlerinin bilinmesi gerekir. Burada y', y fonksiyonunun türevidir.[2]

Bir $f(t)$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3-1}$$

[2] Sapma değişkenleri için kullanılan kesme işareti ile türev için kullanılan kesme işaretini ayırmak için sapma y' ve türev y' olarak simgelenmiştir.

3.1 Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

Farklı fonksiyon türlerinin Laplace dönüşümlerine geçilmeden önce diferansiyel denklemde y olarak geçen fonksiyonun Laplace dönüşümü bilinmelidir. Bu ifade bir $y(t)$ fonksiyonunu temsil eder. Örneğin $3y' + y + 3t = 0$ diferansiyel denkleminde geçen y ifadesi böyle bir ifadedir. y fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}(y) = Y(s) \tag{3-2}$$

Bir $f(t)$ fonksiyonunun dönüşümü ise aşağıdaki gibi olur.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \tag{3-3}$$

t'ye bağlı olan fonksiyonlar Laplace dönüşümü ile artık yeni formata kavuşarak s'ye bağlı hale gelirler. t'den s'ye geçiş sayesinde denklem cebirsel olarak ifade edilmiş olur. Sonrasında ters Laplace dönüşümü ile yeniden t'li formata geçiş yapılır.

Birinci türevi alınmış bir fonksiyonun (y', $f'(t)$, df/dt) Laplace dönüşümü ise aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0)$$
$$\mathcal{L}[df/dt] = sF(s) - f(0) \tag{3-4}$$

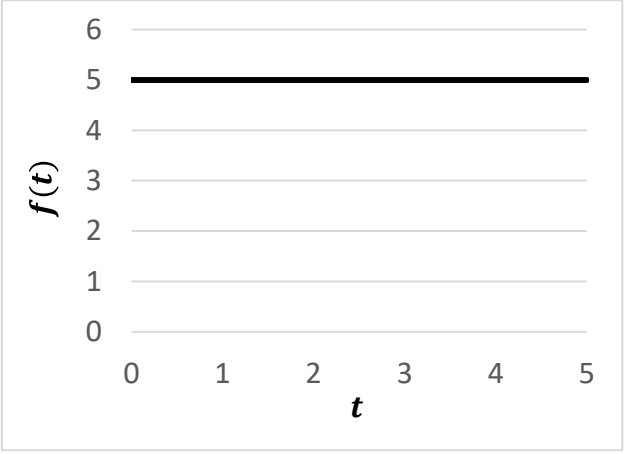
Burada $t = 0$ anı genellikle girdilerde değişimin meydana geldiği an olarak kabul edilir. Yani zaman sayacı değişim olduğu anda başlatılır.

İkinci türevi alınmış bir fonksiyonun (y'', $f''(t)$, $d^2 f/dt$) Laplace dönüşümü ise aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \tag{3-5}$$

3.1.1 Sabit Fonksiyonlar

Sabit fonksiyonlar dinamik olmayan bir proses girdisini ifade etmek için kullanılan fonksiyonlardır. Örneğin dakikada 5 litre sabit hızla su pompalayan bir pompanın hızı $f(t) = 5$ şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.1. $f(t) = 5$ fonksiyonunun grafiği.

$f(t) = 5$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty 5e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{5e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{5e^{-\infty}}{-s} - \left(\frac{5e^0}{-s}\right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{5(0)}{-s} - \left(\frac{5(1)}{-s}\right)$$

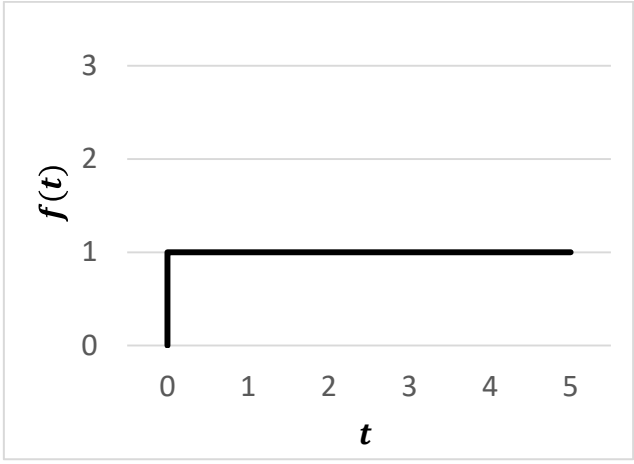
$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}(5) = \frac{5}{s}$$

Dolayısıyla a sabit bir sayı olmak üzere bir $f(t) = a$ fonksiyonu için Laplace fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}(a) = \frac{a}{s} \tag{3-6}$$

3.1.2 Basamak Fonksiyonu

Basamak fonksiyonu proses dinamiğinde ve kontrolünde sıklıkla kullanılan önemli bir girdidir. Bir parametrenin değerini bir anda bir basamak değiştirmek basamak fonksiyonuna örnektir.



Şekil 3.2. Birim basamak fonksiyonu grafiği.

Denklem (3-7)'de birim basamak fonksiyonu tanımlanmıştır.

$$f(t) = \begin{cases} 0: t < 0 \\ 1: t \geq 0 \end{cases} \quad (3\text{-}7)$$

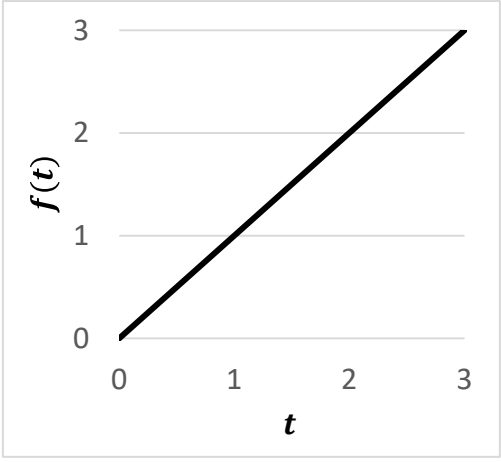
Birim basamak fonksiyonu $t \geq 0$ için sabit fonksiyon olacağı için sabit fonksiyonun Laplace dönüşümü ile aynı olur.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \quad (3\text{-}8)$$

Eğer basamak değeri 1 değil a ise bu durumda dönüşüm a/s olur.

3.1.3 Rampa Fonksiyonu

Proses girdi parametrelerinden birisi sabit bir ivmede değişim geçiriyorsa bu durum rampa fonksiyonu ile tanımlanır.



Şekil 3.3. $f(t) = t$ rampa fonksiyonunun grafiği.

Basamak fonksiyonunda anlık bir değişim vardır ve sonrası sabittir. Ancak burada değişim süreklidir. $f(t) = t$, bu duruma örnek bir

fonksiyondur. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.3'te ve Laplace dönüşümü aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{L}[f(t)] = L(t) = \frac{1}{s^2} \tag{3-9}$$

3.1.4 Üstel Fonksiyonlar

Diferansiyel denklem çözümlerinde üstel fonksiyonlar yer aldığı için bu fonksiyonların Laplace dönüşümleri de önemlidir. Örneğin e^{-mt} (m>0) için Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}(e^{-mt}) = \frac{1}{s+m} \tag{3-10}$$

Çeşitli fonksiyonların Laplace dönüşümleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. Çeşitli fonksiyonların Laplace dönüşümleri

	Fonksiyon $f(t)$	**Laplace Dönüşümü $F(s)$**
1	$\delta(t)$ birim impuls	1
2	$f(t) = 1$ (birim basamak fonk.)	$\frac{1}{s}$
3	$f(t) = t$ (rampa fonksiyonu)	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$
6	e^{-mt}	$\frac{1}{s+m}$
7	$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{\tau s+1}$
8	$\frac{1}{m_1-m_2}(e^{-m_2t}-e^{-m_1t})$	$\frac{1}{(s+m_1)(s+m_2)}$
9	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$	$\frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$
10	$\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}e^{-m_1t}+\frac{m_3-m_2}{m_1-m_2}e^{-m_2t}$	$\frac{s+m_3}{(s+m_1)(s+m_2)}$
11	$1-e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{s(\tau s+1)}$
12	$\frac{df}{dt}$	$sF(s)-f(0)$
13	$\frac{d^2f}{dt}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

ÖRNEK 3.1

Laplace dönüşümüyle aşağıdaki diferansiyel denklemi çözünüz.

$$8\frac{dy}{dt} + y = 2$$

$$y(0) = 1$$

ÇÖZÜM:

Burada amaç $y(t)$'yi bulmaktır. Bunun için öncelikle, verilen diferansiyel denklem Laplace dönüşümü ile cebirsel denkleme dönüştürülür.

$$8\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(2)$$

$$8[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{2}{s}$$

Görüldüğü gibi yukarıdaki denklem artık bir cebirsel denklemdir. Sıradaki adım $Y(s)$'yi elde etmektir.

$$8sY(s) - 8 + Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s)(8s + 1) = \frac{2}{s} + 8$$

$$Y(s) = \frac{8s + 2}{s(8s + 1)}$$

Sıradaki adım ters Laplace dönüşümü ile $Y(s)$'den $y(t)$'ye geçiş yapmaktır. s'li ifadeler sadeleştirilir. Bunun için hem pay hem de payda 8'e bölünür.

$$Y(s) = \frac{s + 0.25}{s(s + 0.125)}$$

Laplace dönüşüm tablosunda $F(s)$ sütunu incelendiğinde eldeki denklemin 10. sıradaki formata uyum sağlamakta olduğu görülür. Tablodaki 10. format şöyledir:

$$\frac{s + m_3}{(s + m_1)(s + m_2)}$$

Burada $m_1 = 0,\ m_2 = 0.125,\ m_3 = 0.25$'tir. Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü tabloda aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} e^{-m_1 t} + \frac{m_3 - m_2}{m_1 - m_2} e^{-m_2 t}$$

m_1, m_2 ve m_3 yerlerine yazılarak $y(t)$ elde edilir.

$$y(t) = \frac{0.25 - 0}{0.125 - 0} e^{-0t} + \frac{0.25 - 0.125}{0 - 0.125} e^{-0.125t}$$

$$y(t) = 2 - e^{-0.125t}$$

Bulunan $y(t)$ fonksiyonu bu son adımda $y(0) = 1$ başlangıç şartını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Bu adım, yapılan çözümü doğrulamak için gereklidir.

$$y(0) = 2 - e^{-0.125 \times 0}$$

$$y(0) = 1$$

Doğrulama gerçekleştiği için çözüm aşağıdaki gibi kabul edilir.

$$y(t) = 2 - e^{-0.125t}$$

3.2 Laplace Dönüşümlerinde Toplam ve Çarpım Durumları

Sabit bir sayı ile fonksiyon çarpım durumunda ise sabit sayı Laplace dışına alınabilir.

$$\mathcal{L}[a \times f(t)] = a \times \mathcal{L}[f(t)] \tag{3-11}$$

Toplam durumundaki iki ayrı fonksiyonun Laplace dönüşümleri ayrı ayrı yürütülebilir.

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \tag{3-12}$$

3.3 Son Değer Teoremi

Laplace dönüşümü verilen bir fonksiyonun sonsuzdaki ($t \to \infty$) kararlı hal değerini bulmak için son değer teoremi kullanılır. Son değer teoremi aşağıdaki eşitliği kullanır.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{3-13}$$

$F(s)$ fonksiyonunun paydasında pozitif kök varsa bu teorem geçerli olmaz. Teoremin kullanılabilmesi için her $s \geq 0$ için $sF(s)$'nin bir limitinin olması gerekir.

3.4 İlk Değer Teoremi

Laplace dönüşümü verilen bir fonksiyonun başlangıçtaki ($t \to 0$) kararlı hal değerini bulmak için ilk değer teoremi kullanılır. İlk değer teoremi aşağıdaki eşitliği kullanır.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to \infty} sF(s) \tag{3-14}$$

ÖRNEK 3.2

Laplace dönüşümü verilen fonksiyon için $t \to \infty$ iken $f(t)$ kaça eşit olur?

$$F(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$$

ÇÖZÜM

Önce verilen fonksiyon denklem (3-13) formuna dönüştürülür.

$$sF(s) = \frac{10}{10s+1}$$

Sonra $s \to 0$ iken limiti alınır.

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10}{10s+1} = 10$$

4 TRANSFER FONKSİYONLARI

Birinci dereceden diferansiyel denklemle tanımlanan bir dinamik sistem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_p x' \tag{4-1}$$

Burada τ, doğrusal bir sistemdeki en küçük zaman sabitini; K_p, kararlı haldeki proses kazancını; y', çıktıda meydana gelen değişimin (sapmanın) zamana bağlı fonksiyonunu ve x' ise girdide meydana gelen değişimi (sapmayı) simgelemektedir. Bir başka ifade ile denklem (4-1), $t = 0$ anında girdide meydana gelen değişimin ardından çıktıda meydana gelecek değişimin zamana bağlı seyrini gösteren bir modeldir. Burada x' ifadesi de zamana bağlı bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Bir sistemin dinamiğini çözmek için yukarıdaki diferansiyel denklem çözülmeli ve y', yani $y'(t)$, fonksiyonu elde edilmelidir. Dinamik sistemlerin modellenmesinde karşılaşılan diferansiyel denklemleri doğrudan çözmek zor olabilmektedir. Dolayısıyla bu modeller Laplace dönüşümü ile cebirsel forma dönüştürülmektedir. Denklem (4-1)'in Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\tau s Y'(s) - y'(0) + Y'(s) = K_p X'(s) \tag{4-2}$$

$y'(0) = 0$'dır. Çünkü $t = 0$'da henüz değişim olmamıştır. Dolayısıyla denklem (4-2), aşağıdaki gibi olur.

$$\tau s Y'(s) + Y'(s) = K_p X'(s) \tag{4-3}$$

Denklem (4-3) bir cebirsel denklem olduğu için üzerinde cebirsel işlemler yapılabilir ve $Y'(s)$ aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$Y'(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1} X'(s) \tag{4-4}$$

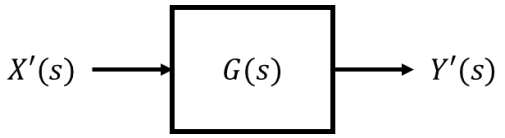
Son adımda ters Laplace dönüşümü ile $y'(t)$ bulunabilir.

$$y'(t) = x'(t) \times K_p \, (1 - e^{-t/\tau}) \tag{4-5}$$

Denklem (4-5)'in elde edilmesiyle sistemin değişim davranışı modellenmiş ve çözülmüş olmaktadır. Ancak ters Laplace dönüşümü her zaman kolay olmayabilir ve çözüme gidilemeyebilir. Çözüme gidilemese bile denklem (4-4) proses kontrolü için hala kullanışlı bir denklemdir. Denklem (4-4) aşağıdaki forma dönüştürüldüğünde bir transfer fonksiyonu elde edilmektedir.

$$\frac{Y'(s)}{X'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1} = G(s) \tag{4-6}$$

Görüldüğü gibi çıktıdaki değişimin (sapmanın) Laplace dönüşümünün girdideki değişimin (sapmanın) Laplace dönüşümüne oranı bize bu iki değişken arasındaki transfer fonksiyonu olan $G(s)$'yi vermektedir. Etkilenen parametre pay'da, etkileyen parametre ise payda'da yer alır. Bu bir blok diyagram ile gösterilecek olursa aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 4.1. Bir transfer fonksiyonunun blok diyagramı.

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi transfer fonksiyonu girdi ve çıktı arasındaki ilişkiyi yansıtan alternatif cebirsel bir model sunmaktadır.

Kompleks sistemler parçalara ayrılarak ve her parça için transfer fonksiyonları elde edilerek bu fonksiyonlar cebirsel işlemlere tabi tutulabilir. Transfer fonksiyonları için izin verilen işlemler[3] sonucunda sistemin geneli için tek bir transfer fonksiyonu elde edilebilir. Böylece sistem hakkında kazanç, kararlılık, sistemin değişimlere yanıtı gibi bazı önemli bilgiler edinilebilir. Bu bilgiler ışığında proses kontrol eylemleri gerçekleştirilebilir. Burada önemli olan nokta ters Laplace dönüşümü ile çözüme gidilemese bile eldeki transfer fonksiyonu ile sistem dinamiğine dair sözü edilen bilgilerin çıkarımının yapılabilmesidir. Dolayısıyla transfer fonksiyonlarının proses kontrolde önemli bir rolü vardır. Transfer fonksiyonları ile model geliştirmek için bazı ön gereksinimlerin sağlanması gerekir.

4.1 Gereksinimler

Girdi fonksiyonu $x(t)$ basamak, rampa veya üstel gibi herhangi bir fonksiyon türünden olabilir. Transfer fonksiyonları bu konuda bir sınırlama getirmemektedir.

Transfer fonksiyonları sistemin başlangıçta kararlı halde olmasını gerektirir. Çünkü burada değişim miktarları arasındaki ilişki

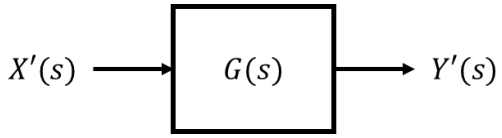
[3] Bu işlemler 4.3 numaralı başlıkta verilmiştir.

modellenmektedir. Modelleme, $t = 0$ anında girdide bir değişim yaşandığında bunun çıktıda nasıl bir değişime yol açacağı ile ilgilidir. Sonuç olarak $y'(0) = x'(0) = 0$ şartı aranmaktadır.

Transfer fonksiyonları doğrusal prosesler için tanımlanır. Doğrusal olmayan prosesler önce doğrusallaştırılır, sonra transfer fonksiyonları elde edilir.

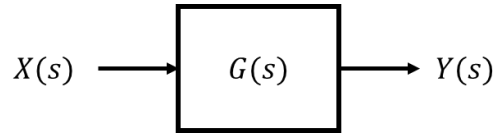
4.2 Blok Diyagramlar

Blok diyagramlar sistemi görsel hale getirirler. Böylece problemi tahlil etmede ve çözüm fikri geliştirmede kolaylık sağlarlar. Bir transfer fonksiyonu aşağıdaki blok diyagram ile görselleştirilir.



Şekil 4.2. Bir transfer fonksiyonunun blok diyagramı.

Transfer fonksiyonları x (girdi) ve y (çıktı) değişkenlerinin sapma (değişim) miktarları arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanıldığından dolayı X' ve Y' simgeleri ile ifade edildiler. Kolaylık olması bakımından kesme işareti kullanımı bazen tercih edilmemektedir. Dolayısıyla bir transfer fonksiyonu içinde X ve Y değişkenleri kesme işareti olmaksızın kullanılsa bile bunların birer sapma değişkeni oldukları unutulmamalıdır. Şimdi Şekil 4.2 yeni simgelemeye uygun olarak yeniden oluşturulabilir.



Şekil 4.3. Bir transfer fonksiyonunun blok diyagramı.

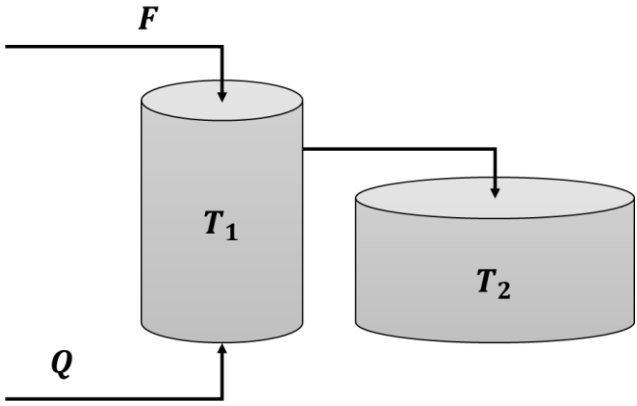
Blok diyagramlarda her çizgi bir değişkenin etkisini (fonksiyonunu) ve akışın yönünü gösterir. Şekil 4.3'teki diyagram matematiksel eşitlik olarak yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$Y(s) = G(s)X(s) \tag{4-7}$$

Blok içine yazışmış fonksiyon, sistemin o kısmı için transfer fonksiyon modelini ifade eder. Diyagramlar özellikle birçok transfer fonksiyonunun birbirine bağlandığı karmaşık proseslerin anlaşılır hale gelmesinde rol oynar.

ÖRNEK 4.1

Isı transferinin olduğu bir karıştırmalı tank ile sadece karıştırmalı tanktan oluşan iki tanklı sistem Şekil 4.4'te verilmiştir. Birinci tanktaki debide (F) oluşan sapmanın ikinci tankın sıcaklığında (T_2) nasıl bir sapma oluşturabileceğini transfer fonksiyon modeli ile ortaya koyunuz ve model için bir blok diyagram oluşturunuz.



Şekil 4.4. Biri ısıtmalı diğeri karıştırmalı iki tanktan meydana gelen sistem.

ÇÖZÜM

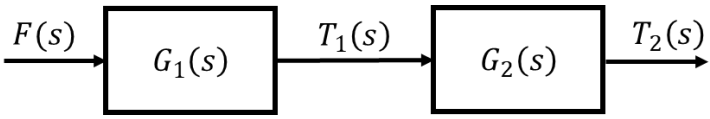
Burada yalnızca F sapma değişkeninin T_2 üzerindeki etkisi istendiği için Q faktörü modele dahil edilmemelidir. Sistem iki ayrı kısma ayrılarak incelenmelidir. Birinci kısımda F ve T_1 arasındaki ilişki, ikinci kısımda T_1 ve T_2 arasındaki ilişki ortaya konmalıdır. Çünkü F faktörü T_1'i etkilemekte ve T_1 ise T_2'yi etkilemektedir. F ve T_1 arasındaki transfer fonksiyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$G_1(s) = \frac{T_1(s)}{F(s)} \tag{4-8}$$

Denklem (4-8)'deki F ve T_1 ifadelerinin aslında sapma değişkenleri yani F' ve T'_1 oldukları unutulmamalıdır. T_1 ve T_2 arasındaki transfer fonksiyon modeli de aşağıdaki gibi olur.

$$G_2(s) = \frac{T_2(s)}{T_1(s)} \tag{4-9}$$

Girdi (F) ve çıktı (T_2) arasındaki ilişki bir blok diyagram ile aşağıdaki gibi gösterilir.



İki kısma ayrılarak modellenen sistem parametreleri şimdi birleştirilerek F ve T_2 arasındaki ilişki doğrudan ortaya konabilir.

$$G(s) = \frac{T_2(s)}{F(s)} = G_1(s)G_2(s) = \frac{T_1(s)}{F(s)} \times \frac{T_2(s)}{T_1(s)} \tag{4-10}$$

ÖRNEK 4.2

Örnek 4.1'deki sistem için $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu durumda $G(s)$ neye eşittir?

$$G_1(s) = \frac{T_1(s)}{F(s)} = \frac{-0.5}{240s+1}\ (K/m^3s^{-1})$$

$$G_2(s) = \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{120s+1}\ (K/K)$$

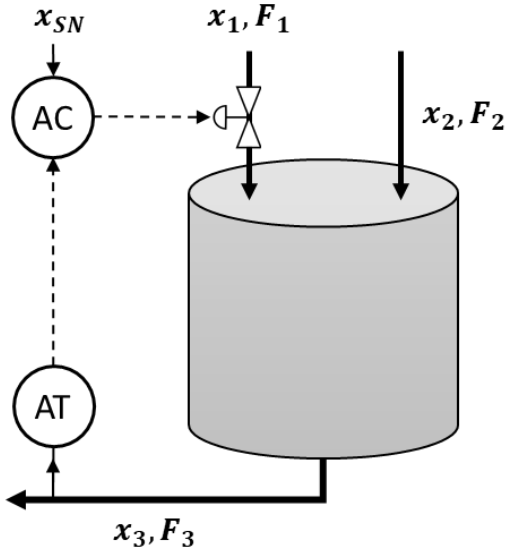
ÇÖZÜM

Denklem (4-10) kullanılarak $G(s)$ hesaplanabilir.

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{-0.5}{240s+1}\ (K/m^3s^{-1}) \times \frac{1}{120s+1}\ (K/K)$$

$$G(s) = \frac{T_2(s)}{F(s)} = \frac{-0.5}{(240s+1)(120s+1)}\ (K/m^3s^{-1})$$

ÖRNEK 4.3



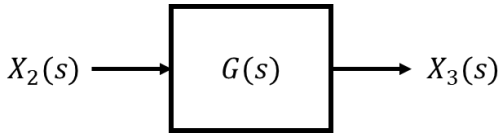
Bir karıştırmalı tanka biri kontrollü diğeri kontrolsüz iki giriş hattı bağlıdır. Tank içindeki yoğunluk ρ (kg/m^3) ve hacim V (m^3) sabittir. Kontrol vanası ile ayarlanabilen girişteki debi F_1 (kg/dk)'dır. A maddesinin bu hattaki kütlesel oranı x_1'dir ve sabittir. Kontrolsüz

girişteki debi F_2 (kg/dk) ve A maddesinin kütlesel oranı x_2'dir. A maddesinin tank çıkışındaki kütlesel oranı x_3 ve çıkıştaki toplam debi F_3 (kg/dk)'dır. Başlangıçta sistem dengededir ve sistemin çok iyi karıştığı varsayılmaktadır.

a) x_2 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini blok diyagramda gösteriniz.
b) x_2 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini transfer fonksiyonu olarak türetiniz.

ÇÖZÜM

a) x_2 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini blok diyagramda gösteriniz.



b) x_2 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini transfer fonksiyonu olarak türetiniz.

İstenen transfer fonksiyonu şudur:

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

Burada kimyasal reaksiyon olmadığı ve sadece karıştırma işlemi olduğu için bileşen kütle denkliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Birikim = giriş - çıkış$$

$$(\rho V x_3)_{t+\Delta t} - (\rho V x_3)_t = (F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3)\Delta t$$

Her iki taraf Δt'ye bölünür ve $\Delta t \to 0$'a giderken limit alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d(\rho V x_3)}{dt} = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3$$

Böylece sistemi tanımlayan birinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilmiş oldu. Burada ρ ve V sabit oldukları için türevin dışına alınabilir.

$$\rho V \frac{dx_3}{dt} = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3 \qquad (4\text{-}11)$$

Bu denklem tüm zamanlar için geçerli bir denklemdir. Transfer fonksiyonları sadece bir girdi ve bir çıktı değişkeni arasında kurulabilmektedir. x_2 ve x_3 için bir transfer fonksiyonu türetilecek ise diğer parametrelerin değişmediği düşünülür. Ancak bu şekilde x_2 ve x_3 arasındaki salt ilişki ortaya çıkarılabilir. Dolayısıyla burada değişken olan terimler x_2 ve x_3'tür. Buna göre denklem başlangıç şartları için yazılırsa şöyle ifade edilir:

$$\rho V \left[\frac{dx_3}{dt}\right]_b = F_1 x_1 + F_2 \overline{x_2} - F_3 \overline{x_3} \qquad (4\text{-}12)$$

Denklem (4-12)'de sadece başlangıç değeri ve bir t anındaki değeri farklı olan terimlerin üzerine çizgi koyulmuş ve bunun o terimin başlangıç değeri olduğu vurgulanmıştır.

Denklem (4-12), denklem (4-11)'den çıkarılırsa diferansiyel denklem, sapma değişkenleri formunda elde edilir.

$$\rho V \frac{dx'_3}{dt} = F_1(x_1 - x_1) + F_2(x_2 - \overline{x_2}) - F_3(x_3 - \overline{x_3})$$

$$\rho V \frac{dx'_3}{dt} = F_2 x_2{}' - F_3 x_3{}' \tag{4-13}$$

Birinci dereceden diferansiyel denklemle tanımlanan bir dinamik sistem aşağıdaki gibi ifade edilmişti.

$$\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_p x' \tag{4-14}$$

Denklem (4-13), denklem (4-14) formunda yazılırsa yukarıdaki dinamik sistem için zaman sabiti (τ) ve kararlı hal proses kazancının (K_p) değerleri bulunabilir.

$$\rho V \frac{dx'_3}{dt} + F_3 x_3{}' = F_2 x_2{}' \tag{4-15}$$

y' teriminin katsayısını 1'e eşitlemek için tüm terimler F_3'e bölünür.

$$\frac{\rho V}{F_3} \frac{dx'_3}{dt} + x_3{}' = \frac{F_2}{F_3} x_2{}' \tag{4-16}$$

Bu durumda $\tau = \frac{\rho V}{F_3}$ ve $K_p = \frac{F_2}{F_3}$ olduğu görülür. Burada F_2 ve F_3'ün başlangıç değerleri ile bir t anındaki değerlerinin aynı olduğu yani bunların fonksiyonda birer değişken değil sabit oldukları unutulmamalıdır. Dolayısıyla τ ve K_p aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}}, \qquad K_p = \frac{\overline{F_2}}{\overline{F_3}} \tag{4-17}$$

Denklem (4-16), τ ve K_p değerleriyle yeniden yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\tau \frac{dx'_3}{dt} + x_3{}' = K_p x_2{}' \tag{4-18}$$

Modelleme probleminin çözümünde bu noktada serbestlik derecesi (DOF) sorgulanabilir. Burada bağımlı değişken sadece $x_3{}'$ değişkenidir. Bir bilinmeyen değişkene karşılık bir eşitlik mevcut olduğu için $DOF = 1 - 1 = 0$'dır ve tam çözüme gidilebilir.

Bu aşamada denklem (4-29)'nin Laplace dönüşümü yapılır.

$$\tau[sX_3{}'(s) - x_3{}'(0)] + X_3{}'(s) = K_p X_2{}'(s) \tag{4-19}$$

$t = 0$'da x_3'te bir değişim olmadığı için $x_3{}'(0) = 0$ olur. Bu durumda denklem (4-30) aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{gathered} \tau s X_3'(s) + X_3'(s) = K_p X_2'(s) \\ X_3'(s)[\tau s + 1] = K_p X_2'(s) \end{gathered} \tag{4-20}$$

$X_3'(s)$ pay ve $X_2'(s)$ payda olacak şekilde denklem (4-31) düzenlenirse istenen transfer fonksiyonu elde edilmiş olur.

$$\frac{X_3'(s)}{X_2'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

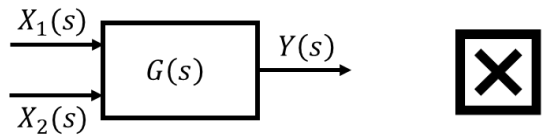
(4-21)

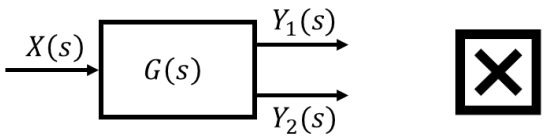
$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}}, \qquad K_p = \frac{\overline{F_2}}{\overline{F_3}}$$

4.3 İzin Verilen İşlemler

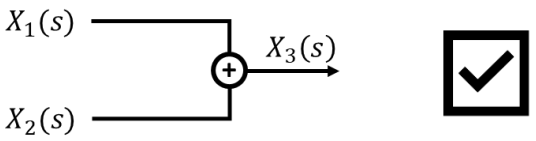
Transfer fonksiyonları doğrusal proseslerin dinamik davranışını cebirsel denklemler ile ifade etmeyi ve modellemeyi sağlayan fonksiyonlardı. Karmaşık sistemler kısımlara ayrılarak kısımlara özgü transfer fonksiyonları oluşturulabilmektedir. Daha sonra sistemin geneli için bir transfer fonksiyon modeli elde edilebilmektedir. Farklı sistemleri, farklı girdileri ve çıktıları ayırmak veya birleştirmek için bazı işlem kurallarına uyulması gerekmektedir.

Transfer fonksiyonları bir girdi ve bir çıktı arasındaki sapma ilişkisini modellemektedir. Dolayısıyla aşağıda gösterildiği gibi transfer fonksiyon modelleri birden fazla giriş veya çıkışı kabul etmez.





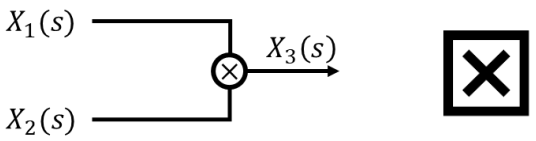
Transfer fonksiyonlarında sistem doğrusal olduğu için iki girdinin toplanması veya çıkarılması ile yeni bir girdi elde edilmesi mümkündür. Bu durum aşağıdaki gibi görselleştirilebilir.



$$X_1(s) + X_2(s) = X_3(s)$$

$$X_1(s) - X_2(s) = X_3(s)$$

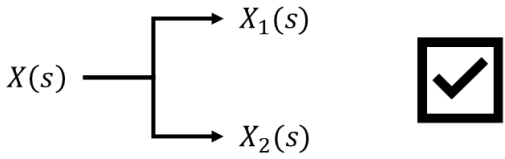
Transfer fonksiyonlarında iki girdinin çarpılması veya bölünmesi ile yeni bir girdi elde edilmesine izin verilmez. Çünkü bu durum sistemin doğrusallığını bozar.



$$X_1(s) \times X_2(s) \neq X_3(s)$$

$$X_1(s) \div X_2(s) \neq X_3(s)$$

Transfer fonksiyon diyagramlarında bir girdi birden fazla kola ayrılarak kopyaları oluşturulabilir.



$$X(s) = X_1(s) = X_2(s)$$

4.4 Çıkarımlar

Dinamiği transfer fonksiyonu ile modellenmiş bir prosese dair çeşitli çıkarımlar yapmak mümkündür. Transfer fonksiyonlarını kullanışlı yapan özelliklerinden birisi de diferansiyel denklemin çözümüne ulaşılamasa bile prosese dair bazı bilgiler verebilmeleridir. Bu bilgiler arasında prosesin kararlı olup olmadığı, salınımlı olup olmadığı, prosesin mertebesi, çıktıdaki sapmanın ulaşacağı son değer ve kararlı haldeki kazanç değeri vardır. Bu çıkarımlar yapılırken transfer fonksiyonundaki pay ve payda incelenir. Pay ve payda, s'nin iki polinomu şeklinde tanımlanırsa ve pay polinomuna $A(s)$, payda polinomuna ise $D(s)$ denirse bir transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$G(s) = \frac{A(s)}{D(s)} \tag{4-22}$$

Burada denklem (4-6)'daki transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi yeniden ifade edebiliriz.

$$Y'(s) = G(s)\,X'(s) = \frac{A(s)}{D(s)}X(s) \tag{4-23}$$

Denklem (4-23), sistemin karakterine dair çıkarımlar yapılacak denklemdir. Örneğin girdi sapmasında (x') birim impuls değişimi olması durumunda $X'(s) = 1$ olur. Böylece birim impuls değişimi söz konusu iken $Y'(s) = G(s)$ eşitliği kurulabilir. Bu durumda $Y'(s)$, $A(s)$ ve $D(s)$ polinomları aşağıdaki ilişkiye sahip olurlar.

$$Y'(s) = \frac{A(s)}{D(s)} \tag{4-24}$$

Bir polinomun genel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots . + a_nx^n \tag{4-25}$$

Bu durumda denklem (4-24) genel polinom formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y'(s) = \frac{a_0s^0 + a_1s^1 + a_2s^2 + \cdots . + a_ns^n}{b_0s^0 + b_1s^1 + b_2s^2 + \cdots . + b_ns^n} \tag{4-26}$$

Çarpanlara ayırma yöntemi ile polinomların kökleri elde edilebilmektedir. Bir polinomun kökleri bulunurken polinom sıfıra eşitlenir ve çarpanlara ayırma işlemi yapılır. Çarpanlardan her birini sıfıra götüren değerler o polinomu da sıfıra götürür. Dolayısıyla bir $P(x)$ polinomunun kökleri o polinomu sıfıra götüren x değerlerdir. Bir polinom birbirinden farklı köklere sahipse bu polinom aşağıdaki formda yazılabilir.

$$Y'(s) = \frac{C_1}{s + m_1} + \frac{C_2}{s + m_2} + \ldots + \frac{C_n}{s + m_n} \tag{4-27}$$

$Y'(s)$ denkleminde C ve m değerleri sırasıyla sabitleri ve kutupları ifade etmektedir. Sistemin geneli için denklem (4-27) formunda bir transfer fonksiyonu elde edilmiş ise ters Laplace dönüşümünü yapmaksızın m değerlerinin ve s terimlerinin özelliğine göre sisteme dair çıkarımlar yapmak mümkündür. m değerleri üç farklı özellikte olabilir.

1. Transfer fonksiyonundaki m değerlerinin tekrar etmeyen reel sayılar içermesi, $y'(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki türde terimleri içermesine yol açar.

$$y'(t) = C_0 + C_1 e^{-m_1 t} + C_2 e^{-m_2 t} + \ldots + C_n e^{-m_n t} \qquad (4\text{-}28)$$

Denklem (4-27)'deki m değerleri işaret değiştirerek denklem (4-28)'deki e sayılarının üslerine yerleşmişlerdir.

Tablo 3.1'deki Laplace dönüşümlerine bakıldığında pozitif m değerlerinin ters Laplace dönüşüm işleminden sonra e sayılarının üslerine negatif m olarak dahil oldukları görülebilir.

2. Transfer fonksiyonundaki m değerlerinin tekrar eden reel sayılar içermesi, $y'(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki türde terimleri içermesine yol açar.

$$y'(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n)\, e^{-mt} \qquad (4\text{-}29)$$

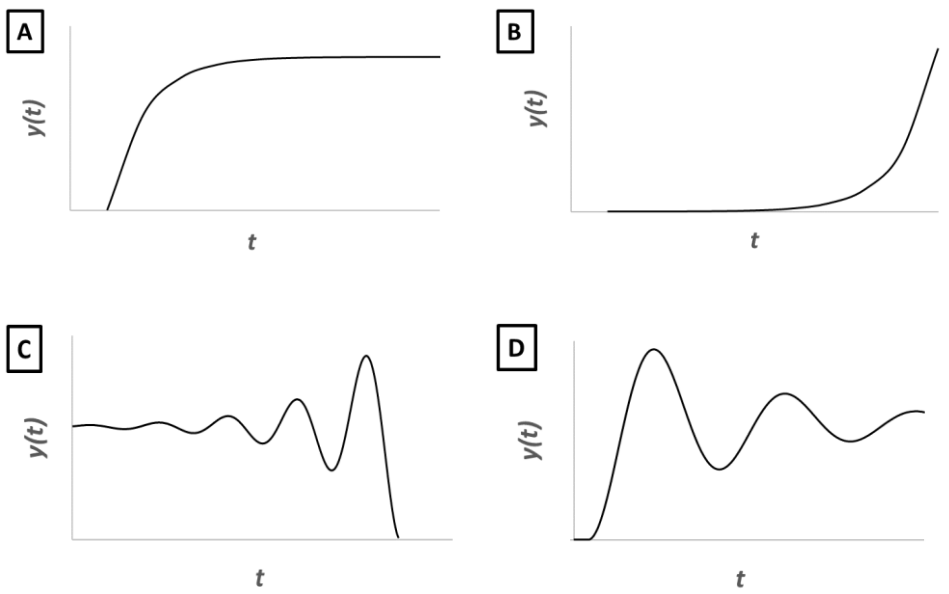
3. Transfer fonksiyonundaki m değerlerinin kompleks sayılar içermesi, $y'(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki türde terimleri içermesine yol açar.

$$y'(t) = [C_1 cos(\omega t) + C_2 sin(\omega t)] e^{-mt} \qquad (4\text{-}30)$$

Denklemdeki ω, radyan/zaman birimindeki frekanstır.

4.4.1 Kararlılık

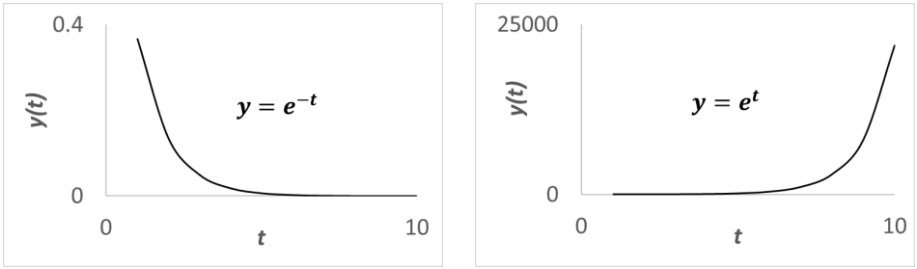
m değerlerinin özelliğinden yola çıkarak yapılacak çıkarımlardan biri sistemin kararlı olup olmadığı bilgisidir. Bir sistemin kararlılığı sistem çıktısı ve sistem girdilerinin zamana bağlı değişimleri arasındaki ilişki üzerinden okunur. Örneğin kararlı sistemlerde sistem girdilerindeki değişim sınırlı bir aralıkta gerçekleştiğinde sistem çıktılarındaki değişim de aynı şekilde sınırlı bir aralıkta gerçekleşir. Eğer sistem kararlı değilse çıktıdaki değişim zamana bağlı olarak sürekli artış davranışı gösterir.



Şekil 4.5. Sistem girdisinde meydana gelen sınırlı değişimin sistem çıktısında oluşturacağı muhtemel bazı davranışlar.

Şekil 4.5'te sistem girdisinde yapılan sınırlı değişim karşısında çıktıda görülebilecek muhtemel davranışlara örnekler gösterilmiştir. Bu sistemlerden A ve D sistemlerinin kararlı, B ve C sistemlerinin kararsız olduğu görülmektedir.

Kararlılık analizi için sistemin genelini ifade eden transfer fonksiyonunun paydasındaki polinom incelenir. Eğer tüm reel m değerleri sıfırdan büyükse sistem kararlıdır. Ancak bir m değeri bile bu kurala uymaz ise farklı girdi değişimleri için sistemin kararlılığı kaybedilebilir. Bu çıkarım $y = e^{-mt}$ sisteminin kararlı olması ve $y = e^{mt}$ sisteminin ise kararsız olması üzerinden yapılmaktadır. Aşağıda bu sistemlerin t'ye bağlı grafikleri $m = 1$ için verilmiştir.



Şekil 4.6. $y = e^{-t}$ ve $y = e^{t}$ fonksiyonlarının kararlılık davranışları.

Şekil 4.6'te görüldüğü gibi e'nin üzeri negatif olduğunda sistem bir karar noktasına ulaşırken, e'nin üzeri pozitif olduğunda sistem kararsız olmaktadır.

4.4.2 Salınım

m değerlerinin özelliğinden yola çıkarak yapılacak çıkarımlardan bir diğeri sistemin salınımlı davranış gösterip göstermeyeceğidir. Sistemin genelini ifade eden bir transfer fonksiyonunun paydasındaki polinom incelenir. Eğer tüm m değerleri reel ise sistem salınım göstermez. Ancak bir m değeri bile kompleks olursa farklı girdi değişimleri için sistemde salınım davranışı görülebilir. Burada tartışılan salınım davranışı, salınımlı girdiye sahip olmayan prosesler içindir.

4.4.3 Mertebe

Sistem mertebesi s terimlerinin özelliğinden yola çıkılarak yapılır. Sistemin genelini ifade eden bir transfer fonksiyonunun paydasındaki polinom incelenir. Polinomun paydasındaki "s" terimlerinin aldığı en büyük üs değeri sistemin mertebesini belirler. Sistemin mertebesini

bilmek, tipik girdi değişimlerine (ör. basamak girdisi) karşı sistemin vereceği yanıtın kabaca tahmin edilmesini sağlar.

4.4.4 Son Değer

Bir transfer fonksiyonu denklem (4-23) formatında yazıldığında Laplace dönüşümü yapılmış bir $\mathcal{L}[y'(t)] = Y'(s)$ fonksiyonu elde edilir. $y'(t)$ fonksiyonunun sonsuzdaki ($t \to \infty$) kararlı hal değerini bulmak ters Laplace dönüşümü yapmaksızın mümkündür. Bunun için son değer teoremi kullanılır. Son değer teoremi denklem (3-13)'te verildiği gibi $s \to 0$ için $sY'(s)$'nin değerini hesaplar.

4.4.5 Kararlı Hal Kazancı

x girdisinde ($t = 0$)'da meydana gelen değişim, y çıktısında zamana bağlı bir değişime yol açmaktadır. y çıktısının yeniden kararlı hale geldiği kararlı sistemlerde ($t \to \infty$) için değişim tamamlanmıştır. Bu süreçte, y çıktısında meydana gelen değişimin x girdisinde meydana gelen değişime oranına kararlı hal kazancı denir.

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4-31}$$

Kararlı hal kazancının hesaplanması son değer teoremine dayanır. x girdisinde birim basamak değişimin olduğu varsayılırsa $\Delta x = 1$ olur. Bu durumda $K = \Delta y$ olur ve Δy son değer teoremi ile bulunur. Denklem (3-13)'e göre Δy aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta y = \lim_{t \to \infty} y'(t) = \lim_{s \to 0} sY'(s) \tag{4-32}$$

Birim basamak değişimin yaşandığı sistemde $Y'(s)$ denklem (4-23)'e göre aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Y'(s) = G(s)\,X'(s) = \frac{G(s)}{s} \tag{4-33}$$

Denklem (4-32)'de $Y'(s)$ yerine $G(s)/s$ yazılırsa aşağıdaki kararlı hal kazanç denklemi elde edilir.

$$K = \Delta y = \lim_{s\to 0} s\,\frac{G(s)}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) \tag{4-34}$$

Sonuç olarak kararlı hal kazancı transfer fonksiyonunun $G(0)$ değeridir.

ÖRNEK 4.4

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 + s - 2}$$

Transfer fonksiyonu verilen sistemin

a) kararlılık, salınım ve mertebe özelliklerini tespit ediniz.
b) birim basamak değişimi için son değer ve kararlı hal kazanç değerlerini tespit ediniz.

ÇÖZÜM

Transfer fonksiyonunun paydası çarpanlarına ayrılır.

$$G(s) = \frac{0.5}{(s-1)(s+2)}$$

a) kararlılık, salınım ve mertebe özelliklerini tespit ediniz.

Tüm m değerleri pozitif olmadığı için sistem kararsızdır.

Tüm m değerleri reel olduğu için sistem salınımsızdır.

s'nin en büyük üssü 2 olduğu için sistem ikinci mertebedendir.

b) birim basamak değişimi için son değer ve kararlı hal kazanç değerlerini tespit ediniz.

Sistem kararsız olduğu için bu değerler hesaplanamaz.

ÖRNEK 4.5

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 3s + 2}$$

Transfer fonksiyonu verilen sistemin

a) kararlılık, salınım ve mertebe özelliklerini tespit ediniz.
b) birim basamak değişimi için son değer ve kararlı hal kazanç değerleriniz tespit ediniz.

ÇÖZÜM

Transfer fonksiyonunun paydası çarpanlarına ayrılır.

$$G(s) = \frac{0.5}{(s + 1)(s + 2)}$$

a) kararlılık, salınım ve mertebe özelliklerini tespit ediniz.

Tüm m değerleri pozitif olduğu için sistem kararlıdır.

Tüm m değerleri reel olduğu için sistem salınımsızdır.

s'nin en büyük üssü 2 olduğu için sistem ikinci mertebedendir.

b) birim basamak değişimi için son değer ve kararlı hal kazanç değerlerini tespit ediniz.

Transfer fonksiyonunun $Y(s)$ ve $X(s)$ sapma değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımladığı varsayılırsa, $x' = 1$ ($\Delta x = 1$) durumu ele alınmalıdır.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{0.5}{(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{0.5\,X(s)}{(s+1)(s+2)}$$

$x' = 1$'in Laplace dönüşümü yapılırsa $1/s$ olur. Denklemde yerine yazılırsa

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{0.5}{(s+1)(s+2)}$$

$$sY(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+2)}$$

$sY(s)$'nin limiti alınarak son değer bulunur.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{0.5}{(0+1)(0+2)} = 0.25$$

Birim basamak değişiminde son değer ve kararlı hal kazancı eşittir. Bu durum denklem (4-31)'den anlaşılabilir.

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta x = 1$ ise $K = \Delta y = 0.25$

5 DOĞRUSALLAŞTIRMA

Bazı proseslerde proses çıktısı ile proses değişkenleri arasında doğrusal olmayan bir ilişki vardır. Bu proseslerde transfer fonksiyon modelleri çıkarılırken doğrusal olmayan diferansiyel denklemler ile karşı karşıya kalınmaktadır. Bu denklemlere Laplace dönüşümünün uygulanabilmesi için doğrusallaştırılmaları gerekmektedir.

5.1 Doğrusal Diferansiyel Denklem

İçinde türevi alınmış bir fonksiyon (y', $\frac{dy}{dx}$) taşıyan denklemlere diferansiyel denklem denir.

$$4y' + 9x = 4 \quad \checkmark$$

$$3\frac{dy}{dx} + 2x = 12 \quad \checkmark$$

$$5y + 3x = 16 \quad \mathbf{X}$$

Bir diferansiyel denklemin doğrusal (lineer) olması için aşağıdaki şartları taşıması gerekir.

- y'li değişkenlerin üstel bir ifade barındırmaması (y^3 veya $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gibi)
- y ile y''nin (yani y ile y'nin türevinin) çarpım durumunda olmaması
- y'li değişkenlerin e'nin üstel değeri konumunda olmaması
- Çok değişkenli fonksiyonlarda değişkenlerin birbiriyle çarpım durumunda olmaması

ÖRNEK 5.1

Verilen denklemin doğrusal olup olmadığını belirleyiniz.

$$f(x) = 2x^2 + 2$$

ÇÖZÜM

Denklem x değişkeninin üslü terimini içerdiği için doğrusal değildir.

ÖRNEK 5.2

Verilen denklemin doğrusal olup olmadığını belirleyiniz.

$$f(x, y) = 2x + y + 4xy\ - 6$$

ÇÖZÜM

Çok değişkenli fonksiyonda x ve y değişkenleri çarpım durumunda olduğu için denklem doğrusal değildir.

5.2 Taylor Serisi

Modeller birden çok fonksiyon içerebilmektedir. Bir modelin doğrusal olması için taşıdığı tüm fonksiyon ve terimlerin (sabitler hariç) doğrusal olması gerekir. Modelde doğrusal olmayan fonksiyonlar Taylor serisi açılımı ile doğrusal yapılır. Bir $f(t)$ fonksiyonunun Taylor açılımı aşağıdaki gibi olur.

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)(t - t_0)^2}{2!} + \frac{f'''(t_0)(t - t_0)^3}{3!} + \ldots$$

Bu kitapta sadece birinci mertebe türeve kadar olan kısım kullanılacaktır. Bu durumda tek değişkenli bir fonksiyon için Taylor açılımı aşağıdaki gibi olur.

$$f(t) \cong f(\overline{t}) + f'(\overline{t})(t - \overline{t}) \tag{5-1}$$

Burada $\overline{t}$ değişken değildir. Sadece t'nin başlangıç kararlı haldeki değeridir. İki değişkenli bir fonksiyon için ise Taylor açılımı aşağıdaki gibi olur.

$$f(a,b) \cong f(\overline{a},\overline{b}) + \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{\overline{a},\overline{b}} (a - \overline{a}) + \left.\frac{\partial f}{\partial b}\right|_{\overline{a},\overline{b}} (b - \overline{b}) \tag{5-2}$$

Doğrusallaştırma ile geliştirilen modeller belli bir hata payına sahiptir. Ancak bu modeller yine de kullanışlıdır. Çünkü doğrusallaştırma ile zaman sabiti ve kazanç gibi sistem dinamiğine dair bilgi sağlayan terimlerin analitik ifadeleri türetilmektedir. Zaman sabiti, sistemin değişime vereceği yanıtın hızına sistemdeki hangi özelliklerin etki ettiğini gösterir. Kazanç ise sistemin değişim karşısında göstereceği sapma oranına sistemdeki hangi özelliklerin etki ettiğini gösterir. Dolayısıyla doğrusallaştırma her ne kadar belli bir hata payı içerse de elde edilen bu bilgiler sistem dinamiğine dair önemli ve kullanışlı bilgiler sağlarlar.

ÖRNEK 5.3

Verilen denklemi Taylor açılımı ile doğrusallaştırınız.

$$f(x) = 2x^2 + 2$$

ÇÖZÜM

Fonksiyonda tek değişken olduğu için denklem (5-1) kullanılabilir. Burada x'in başlangıç kararlı hal değeri $\overline{x}$ ile ifade edilir.

$$f(x) \cong 2\overline{x}^2 + 2 + 4\overline{x}\,(x - \overline{x})$$

Tekrar vurgulamak gerekirse burada $\overline{x}$, bir değişken değil, belirli bir değerdir. Doğrusallaştırma $\overline{x}$ noktası baz alınarak yapılmaktadır. Dolayısıyla $x = \overline{x}$ noktasında asıl fonksiyon ile doğrusallaştırılan fonksiyon aynı sonucu verir. x'in değeri $\overline{x}$ noktasından uzaklaştığında doğrusallaştırılan fonksiyon belirli bir hata payı ile hesaplama yapar. Hata payı asıl denklemin doğrusallıktan uzaklık derecesine ve x'in $\overline{x}$ noktasından uzaklığına göre etkilenir.

ÖRNEK 5.4

Verilen denklemi Taylor açılımı ile doğrusallaştırınız.

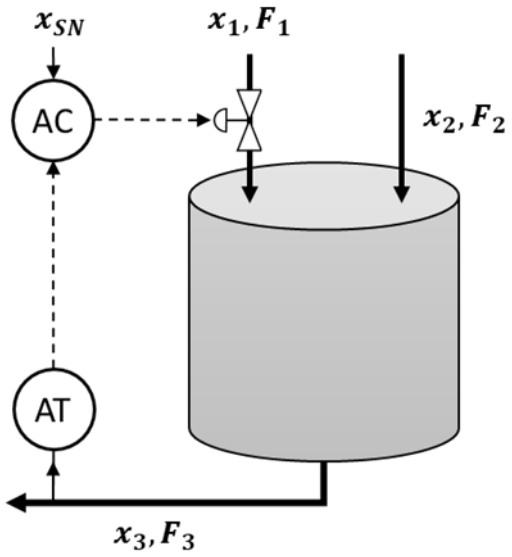
$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_1 + 2$$

ÇÖZÜM

Fonksiyon çarpım durumunda iki değişken içerdiği için denklem (5-2) kullanılarak doğrusallaştırma yapılabilir.

$$f(x_1, x_2) \cong (2\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1} + 2) + (2\,\overline{x_2} + 1)(x_1 - \overline{x_1}) + 2\,\overline{x_1}(x_2 - \overline{x_2})$$

ÖRNEK 5.5

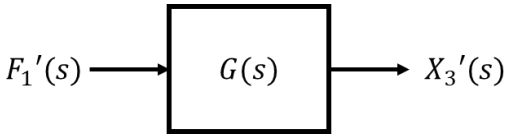


Bir karıştırmalı tanka biri kontrollü diğeri kontrolsüz iki giriş hattı bağlıdır. Tank içindeki yoğunluk ρ (kg/m^3) ve hacim V (m^3) sabittir. Kontrol vanası ile ayarlanabilen girişteki debi F_1 (kg/dk)'dır. A maddesinin bu hattaki kütlesel oranı x_1'dir ve sabittir. Kontrolsüz girişteki debi F_2 (kg/dk) ve A maddesinin kütlesel oranı x_2'dir. A maddesinin tank çıkışındaki kütlesel oranı x_3 ve çıkıştaki toplam debi F_3 (kg/dk)'dır. Başlangıçta sistem dengededir ve sistemin çok iyi karıştığı varsayılmaktadır.

a) F_1 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini blok diyagramda gösteriniz.
b) F_1 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini transfer fonksiyonu olarak türetiniz.
c) x_3'ün t'ye bağlı değişimini veren $x_3(t)$ fonksiyonunu elde ediniz.

ÇÖZÜM

a) F_1 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini blok diyagramda gösteriniz.



b) F_1 ile x_3 arasındaki sapma ilişkisini transfer fonksiyonu olarak türetiniz.

İstenen transfer fonksiyonu şudur:

$$G(s) = \frac{X_3'(s)}{F_1'(s)}$$

Burada kimyasal reaksiyon olmadığı ve sadece karıştırma işlemi olduğu için bileşen kütle denkliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Birikim = giriş - çıkış$$

$$(\rho V x_3)_{t+\Delta t} - (\rho V x_3)_t = (F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3)\Delta t$$

Her iki taraf Δt'ye bölünür ve $\Delta t \to 0$'a giderken limit alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d(\rho V x_3)}{dt} = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3$$

Böylece sistemi tanımlayan birinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilmiş oldu. Burada ρ ve V sabit oldukları için türevin dışına alınabilir.

$$\rho V \frac{dx_3}{dt} = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3 \qquad (5\text{-}3)$$

Bu aşamada terimler için doğrusallık analizi yapılır. dx_3/dt teriminin katsayısı sabit sayı olduğu için bu terim doğrusaldır. F_1x_1 teriminde sadece F_1 değişken durumdadır. F_2x_2 teriminde değişken yoktur. F_3x_3 teriminde ise hem F_3 hem de x_3 değişken durumdadır. İki değişkenin çarpım durumunda olması doğrusallığı bozar. Dolayısıyla F_3x_3 terimi için Taylor serisi kullanılarak doğrusallaştırma yapılır.

$$f(F_3, x_3) = F_3x_3$$

$$f(F_3, x_3) \cong f\left(\overline{F_3}, \overline{x_3}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial F_3}\right|_{\overline{F_3},\overline{x_3}} \left(F_3 - \overline{F_3}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\overline{F_3},\overline{x_3}} (x_3 - \overline{x_3})$$

$$f(F_3, x_3) \cong \overline{F_3}\,\overline{x_3} + \overline{x_3}\left(F_3 - \overline{F_3}\right) + \overline{F_3}(x_3 - \overline{x_3})$$

Doğrusallaştırılan F_3x_3 şimdi denklem (5-3)'de yerine yerleştirilir.

$$\rho V \frac{dx_3}{dt} = F_1x_1 + F_2x_2 - \left[\overline{F_3}\,\overline{x_3} + \overline{x_3}\left(F_3 - \overline{F_3}\right) + \overline{F_3}(x_3 - \overline{x_3})\right] \quad (5\text{-}4)$$

Bu denklem tüm zamanlar için geçerli olan denklemdir. Başlangıç kararlı halde $F_3 = \overline{F_3}$ ve $x_3 = \overline{x_3}$ olduğu için denklem (5-3) başlangıç kararlı hal için yeniden yazılır.

$$\rho V \left[\frac{dx_3}{dt}\right]_b = \overline{F_1}x_1 + F_2x_2 - \overline{F_3}\,\overline{x_3} \quad (5\text{-}5)$$

Denklem (5-5), denklem (5-4)'ten çıkarılırsa diferansiyel denklem, sapma değişkenleri formunda elde edilir.

$$\rho V \frac{dx_3{}'}{dt} = (F_1 - \overline{F_1})x_1 + F_2x_2 - F_2x_2 - \overline{F_3}\,\overline{x_3} + \overline{F_3}\,\overline{x_3} - \overline{x_3}\left(F_3 - \overline{F_3}\right) - \overline{F_3}(x_3 - \overline{x_3}) \tag{5-6}$$

$$\rho V \frac{dx_3{}'}{dt} = F_1{}'x_1 - \overline{x_3}(F_3{}') - \overline{F_3}(x_3{}')$$

Dinamik davranışı gösterecek bu denklemin serbestlik derecesi analizi yapılır. Denklemdeki bilinmeyen değişkenler $x_3{}'$ ve $F_3{}'$ değişkenleridir. $F_1{}'$ ise bilinmektedir. Çünkü $F_1{}'$ sapmasının oluşturacağı $x_3{}'$ sapmasının hesaplanması, yani ikisi arasındaki ilişki, istenmektedir. Bilinmeyen sayısı 2, denklem sayısı 1 olduğu için çözüm mümkün değildir. Bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Tankın hacmi sabit olduğu için toplam kütle denkliği bu ihtiyacı karşılar.

$$F_3 = F_1 + F_2 \tag{5-7}$$

Bu denklem tüm zamanları için geçerli denklemdir. Denklem (5-7) başlangıç şartları için yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\overline{F_3} = \overline{F_1} + F_2 \tag{5-8}$$

Burada sadece F_3 ve F_1 değişken durumunda olduğu ve F_2 sabit olduğu için sadece F_3 ve F_1 için üst çizgi kullanılmıştır. Denklem (5-8), denklem (5-7)'den çıkarılırsa sapma değişkenleri elde edilir.

$$(F_3 - \overline{F_3}) = (F_1 - \overline{F_1}) + (F_2 - F_2)$$

$$F_3{}' = F_1{}' \tag{5-9}$$

Şimdi denklem (5-6)'da $F_3{}'$ yerine $F_1{}'$ yazılarak bilinmeyen sayısı 1'e düşürülür.

$$\rho V \frac{dx_3{}'}{dt} = F_1{}' x_1 - \overline{x_3}(F_1{}') - \overline{F_3}(x_3{}')$$

$$\rho V \frac{dx_3{}'}{dt} = F_1{}'(x_1 - \overline{x_3}) - \overline{F_3} x_3{}' \tag{5-10}$$

Birinci dereceden diferansiyel denklemle tanımlanan bir dinamik sistem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_p x' \tag{5-11}$$

Denklem (5-10), denklem (5-11) formunda yazılırsa yukarıdaki dinamik sistem için zaman sabiti (τ) ve kararlı hal proses kazancının (K_p) değerleri bulunabilir.

$$\rho V \frac{dx_3{}'}{dt} + \overline{F_3} x_3{}' = F_1{}'(x_1 - \overline{x_3})$$

$$\frac{\rho V}{\overline{F_3}} \frac{dx_3{}'}{dt} + x_3{}' = \frac{x_1 - \overline{x_3}}{\overline{F_3}} F_1{}' \tag{5-12}$$

Bu durumda zaman sabiti ve kararlı hal proses kazancı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}} \qquad\qquad K_p = \frac{x_1 - \overline{x_3}}{\overline{F_3}}$$

Denklem (5-12) τ ve K_p terimleriyle yeniden yazılır.

$$\tau \frac{dx_3{}'}{dt} + x_3{}' = K_p F_1{}' \tag{5-13}$$

Bu aşamada Laplace dönüşümü yapılır.

$$\tau[sX_3{}'(s) - x_3{}'(0)] + X_3{}'(s) = K_p F_1{}'(s) \tag{5-14}$$

$t = 0$'da x_3'te bir değişim olmadığı için $x_3{}'(0) = 0$ olur. Bu durumda denklem (5-14) aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{gathered} \tau s X_3{}'(s) + X_3{}'(s) = K_p F_1{}'(s) \\ X_3{}'(s)[\tau s + 1] = K_p F_1{}'(s) \end{gathered} \tag{5-15}$$

$X_3{}'(s)$ pay ve $F_1{}'(s)$ payda olacak şekilde denklem (5-15) düzenlenirse istenen transfer fonksiyonu elde edilmiş olur.

$$\frac{X_3{}'(s)}{F_1{}'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1} \tag{5-16}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}}, \qquad K_p = \frac{x_1 - \overline{x_3}}{\overline{F_3}}$$

c) x_3' değişkeninin t'ye bağlı değişimini veren $x_3'(t)$ fonksiyonunu elde ediniz.

$X_3'(s)$ ifadesi eşitliğin sol tarafında yalnız bırakılır.

$$X_3'(s) = K_p F_1'(s) \frac{1}{\tau s + 1} \tag{5-17}$$

Ters Laplace dönüşümü alınarak $x_3'(t)$ bulunur.

$$x_3'(t) = K_p F_1'(t) \times (1 - e^{-t/\tau}) \tag{5-18}$$

6 PROSES KONTROLÜ

Fiziksel, kimyasal ve mikrobiyolojik işlemlerle ham maddeler ürünlere dönüşmektedir. Bu dönüşüm işleminin tamamına veya ara işlemlere proses adı verilmektedir. Prosesler tasarlanırken istenen özellikte bir ürünün güvenli ve verimli bir şekilde üretimi için mühendislik hesaplamaları yapılmaktadır. Ürün kalitesine, güvenli ve verimli üretime etki etmesi muhtemel parametreler hesaba katılmaktadır. Bu hesaplamalar yüksek bir hassasiyetle yapılsa dahi proses kontrole ihtiyaç duyulmaktadır.

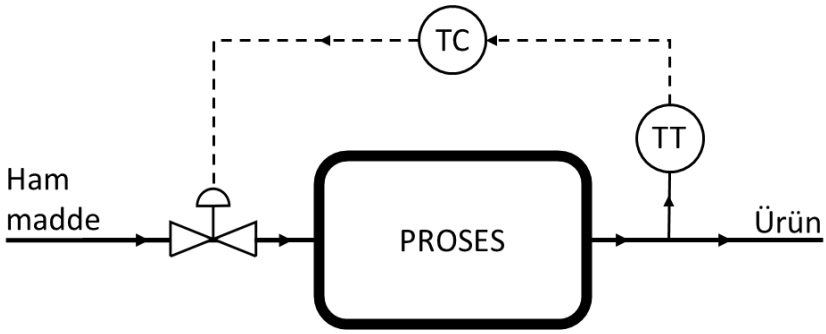
Proses kontrole ihtiyaç duyulmasının sebeplerinden biri mühendislik hesaplamalarında kullanılan modellerin (denklikler, formüller) tam bir uygunluk göstermemesi olabilir. Örneğin ısı transferi hesaplamalarında kullanılmak üzere çeşitli materyaller için deneysel yollarla yaklaşık olarak geliştirilmiş ısı transfer katsayıları vardır. Proseste kullanılan materyallerin saflık derecesi ve prosese özgü şartlar dikkate alındığında ısı transfer katsayılarının ne derecede uygunluk göstereceği bilinemez. Dolayısıyla hesaplamalarda oluşması muhtemel hata payının hedeflenen ürün özelliklerinin tutturulmasına engel olmaması için proses kontrol mekanizmasına ihtiyaç vardır.

Proses kontrole ihtiyaç duyulmasının sebeplerinden bir diğeri kontrol edilemeyen ve prosesi etkileyen çevresel şartlar olabilir. Bu tür etkenlere bozan etkenler denilmektedir. Ortam sıcaklığı, ortamdaki nem miktarı, düzensiz proses girdileri bozan etkenlere örnek olarak verilebilir. Bozan etkenlerin son ürün üzerindeki olumsuz etkilerini azaltmak proses kontrol ile mümkün olabilmektedir.

Proses kontrolü gerektirecek bir başka sebep ise proses sonunda elde edilen ürünün özelliklerinde istemli bir değişikliğe gidilmesi olabilir. Mamul maddenin örneğin üretim hızı, sertliği, çıkış sıcaklığı gibi özelliklerinde istemli bir değişiklik yapılmak istendiğinde bu proses kontrol araçları ile mümkündür.

6.1 Tasarım

Proses kontrol tasarımları *Piping and Instrumentation Diagrams (P&ID)* adı verilen ve uluslararası standartları olan konsept ile yapılır. Şekil 6.1'de bir proses kontrol döngüsünün üç temel unsuru olan sensör, operatör ve müdahale aracı P&ID konseptinde gösterilmiştir.



Şekil 6.1. Basit bir sıcaklık kontrol döngü diyagramı.

Sistemleri sadece yazı ile açıklamanın güçlükleri vardır. Dolayısıyla kontrol dokümantasyonu için P&ID gibi standart sembolleri olan çizimlere başvurulmaktadır. Şekil 6.1'de proses çıkışına yerleştirilen sıcaklık sensörü (TT, *temperature transmitter*) yaptığı ölçümleri operatöre (TC, *temperature controller*) iletmektedir. Operatör ise gelen sensör verisine göre proses girişindeki müdahale aracı olan vanayı kontrol ederek döngüyü tamamlamaktadır.

P&ID çizimleri; boru hatlarını ve ekipman bağlantılarını, bağlantıların üstten veya alttan olması gibi yaklaşık konumlarını, ekipman numaralarını, boru ölçülerini, sensörleri, vanaları ve kontrol döngülerini içerir. Nesneler arası mesafeler, nesnelerin boyutları, sensörlerin çalışma prensipleri gibi bilgiler ise P&ID çizimlerinde yer almaz.

Kontrol döngülerinde kullanılan sensörler ve kontrol ediciler için harfler kullanılmaktadır. Bu kodlama sistemi iki veya üç harfli bir yapıya sahiptir. İlk harfler ölçülen veya kontrol edilen değişkeni simgeler. İkinci ve üçüncü harfler ise sensörün veya kontrol edicinin işlevini simgeler. Aşağıda değişkenler ve işlevler için kullanılan kodlar verilmiştir.

Tablo 6.1. P&ID çizimlerinde kullanılan değişken ve işlevlerin kodlama sistemi.

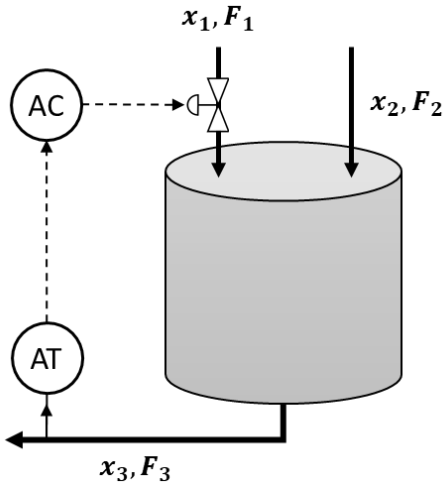
Değişkenler		**İşlevler**	
A	Analiz (Kompozisyon)	A	Alarm
D	Yoğunluk	C	Kontrol edici
F	Debi	I	Gösterge
L	Seviye	R	Kaydedici
M	Nem	T	Transmitter
P	Basınç	V	Vana
Q	Miktar		
T	Sıcaklık		
V	Viskozite		
W	Ağırlık		

P&ID çizimlerinde düz çizgi ile yapılan bağlantılar proses bağlantısıdır. Kesikli çizgi ile yapılan bağlantılar ise elektrik sinyalidir.

6.2 Proses Değişkenleri

Bir prosese ait değişkenler temelde üç farklı türde veya özellikte olabilir. Bunlar kontrol edilen değişken (CV, *controlled variable*), ayarlanan değişken (MV, *manipulated variable*) ve bozan etken değişkeni (DV, *disturbance variable*) olarak isimlendirilirler. Kontrol edilen değişken, proses kontrolün hedeflerinden birini veya birkaçını gerçekleştirmek için belirli bir set noktasında tutulması gereken değişkendir. Bozan etken değişkeni, kontrol edilen değişkenin set noktasından sapmasına sebep olabilecek değişken(ler)dir. Bozan etken değişkenleri, proses girdilerinde veya ortam koşullarında meydana gelen ve kontrol edilen değişkene etki edecek kontrol dışı parametrelerdir. Ayarlanan değişken ise kontrol edilen değişken set noktasından saptığında karşı düzeltici hamle yapılmasını sağlayacak değişkendir. Tasarım ve kontrol mühendisleri bir prosesin kontrolü için bu üç özellikteki değişkenlerin hangi değişkenler olabileceğine karar vererek kontrol planını şekillendirirler.

Şekil 6.2, karıştırmalı tank sisteminde çıkış hattının kompozisyonunu kontrol eden bir kontrol döngüsünü göstermektedir. Buradaki proses kontrolün hedefi ürün kalitesi olabilir. Bunun için çıkış kompozisyonunda örneğin bir M maddesinin konsantrasyonunun belli bir değerde olması istenmektedir. AT (*analysis transmitter*) ve AC (*analysis controller*) sırasıyla kompozisyon analizi sensörleri ve kompozisyon operatörleri için kullanılan P&ID sembolleridir. Buradaki müdahale aracı ise şekilde görülen kontrol vanasıdır. Giriş ve çıkış hatlarında bulunan parametrelerden biri olan x, M maddesinin ilgili hattaki kütlesel oranını göstermektedir. F ise ilgili hattın kütlesel debisini ifade etmektedir. Bu sistemde kontrol edilen değişkenin x_3, bozan etken değişkeninin x_2 veya F_2 ve ayarlanan değişkenin F_1 olabileceği söylenebilir.



Şekil 6.2. Karıştırmalı tank sisteminde bir kontrol döngüsü.

x_2 veya F_2 parametrelerinde yaşanan kontrol dışı, istemsiz değişimler x_3'te sapmaya sebep olmaktadır. Dolayısı ile F_1 parametresi, vana vasıtasıyla ayarlanarak sapmalara karşı gerekli müdahale yapılmaktadır.

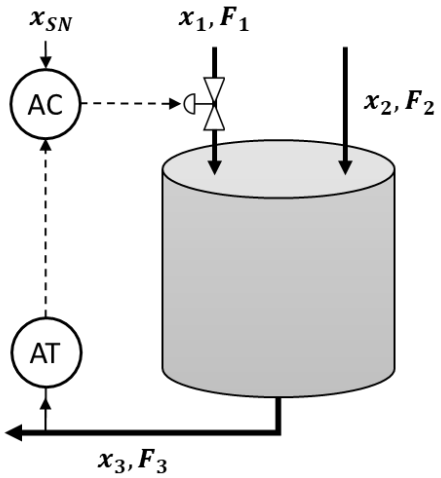
6.3 Kontrol Yöntemleri

Proses kontrolde geri beslemeli ve ileri beslemeli olmak üzere temelde iki tür kontrol yöntemi vardır. Her iki yönteminde çeşitli avantajları ve dezavantajları vardır. Prosesin ve ürünün karakteristiğine göre bu iki yöntemden biri veya her ikisi birden prosese uygulanabilmektedir.

6.3.1 Geri Beslemeli Kontrol

Geri beslemeli kontrolün ayırt edici özelliği kontrol edilen değişkenin ölçülmesidir. Böylece hedeflenen özelliklerde üretim yapıldığından emin olunur. Örneğin sıcaklık kontrolü için kullanılan bir geri beslemeli kontrolde ürünün çıkış sıcaklığı ölçülür. Sıcaklık eğer set noktasından

sapma göstermeye başlamış ise çıkış sıcaklığına etkisi olan ve aynı zamanda ayarlanabilen proses girdilerine müdahale edilerek sapmanın önü alınır. Dolayısıyla geri beslemeli kontrolde bir ayarlanabilir değişkenin olması zorunludur. Ayarlanabilen değişken kullanılarak kontrol edilemeyen bozan etken değişkenlerinin prosese etkileri minimize edilmeye çalışılır.



Şekil 6.3. Bir geri beslemeli kontrol örneği.

Şekil 6.3'te bir geri beslemeli kontrol döngüsü gösterilmektedir. Burada bir karıştırma prosesi gerçekleşmektedir. x ve F sırasıyla konsantrasyon ve debiyi ifade etmektedir. Bir M maddesinin çıkışta belli bir konsantrasyonda olması istenmektedir. Dolayısıyla burada kontrol edilen değişken x_3'tür. $x_1 = 1$ olacak şekilde proses tasarlanmıştır. Yani birinci (sol giriş) hattan saf M maddesi tanka dahil edilmektedir. İkinci hattan giren M maddesinin konsantrasyonu ise değişkenlik göstermektedir. Bu durum x_3'te sapmaya sebep olmaktadır. Eğer x_3 olması gereken değerden daha yükseğe çıkmış ise birinci hattaki debi azaltılarak x_3'ün yeniden normal değerlere dönmesi sağlanmaktadır. Dolayısıyla burada

geri beslemeli kontrolün olmazsa olmaz olan ayarlanabilir değişkeni F_1'dir. Geri beslemeli bir kontrol aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Kontrol edilen değişken ölçülür.
2. Bozan etken değişkeni ölçülmez.
3. Kontrol edilen değişkene etki edecek bir ayarlanan değişken gerektirir.

Geri beslemeli kontrol, kontrol edilen değişkenin gözetimini gerektirdiği için güven veren bir yöntemdir. Bu yöntemin bir diğer avantajı bozan etken değişkenlerinin ölçülmesini gerektirmemesidir. Çünkü bozan etkenleri saptamak ve ölçmek mümkün olmayabilir veya ekonomik olmayabilir. Bu avantajlarından dolayı geri beslemeli kontrol yöntemi en çok başvurulan yöntemdir.

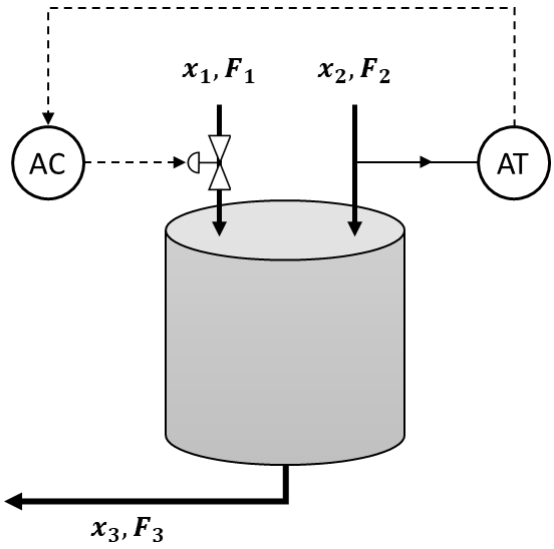
Geri beslemeli kontrol, sistemde bozulma meydana geldikten sonra müdahalesini gerçekleştirir. Yani çıkış konsantrasyonu x_3'te sapma oluştuktan sonra müdahale gelir. Müdahale gerçekleştikten sonra x_3 hemen normale dönmez. Yeniden istenilen değerlere gelinmesi zaman alır. Bu sırada defolu üretim gerçekleşiyor olabilir. Dolayısı ile geri beslemeli kontrol hız bakımından dezavantajlı bir yöntemdir.

6.3.2 İleri Beslemeli Kontrol

İleri beslemeli kontrolde kontrol edilen değişken değil, bozan etken değişkeni ölçülür. Bozan etken değişkenindeki değişime göre, ayarlanan değişken devreye sokulur. Böylece kontrol edilen değişkenin istenen değerlerde kalması sağlanır.

Şekil 6.4'te bir ileri beslemeli kontrol sistemi gösterilmektedir. Burada görüldüğü gibi kontrol edilen değişken olan x_3 değil, bozan etken

değişkeni olan x_2 ölçülmektedir. x_2'deki değişimlere göre F_1 ayarlanarak x_3'ün istenen değerlerde kalması sağlanmaktadır.



Şekil 6.4. Bir ileri beslemeli kontrol örneği.

İleri beslemeli bir kontrol aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Kontrol edilen değişken ölçülmez.
2. Bozan etken değişkeni ölçülür.
3. Kontrol edilen değişkene etki edecek bir ayarlanan değişken gerektirir.

İleri beslemeli kontrolün avantajı, hızlı müdahale özelliğidir. Bozan etken değişkenindeki değişim ölçülür ölçülmez ayarlanan değişken devreye sokulduğu için geri beslemeli kontrol yöntemine göre daha hızlı bir müdahale gerçekleşir.

İleri beslemeli kontrolün dezavantajı, ölçülmesi zor olan bozan etken değişkenlerinin ölçülmesini gerektirmesidir. Ayrıca farkına varılamayan

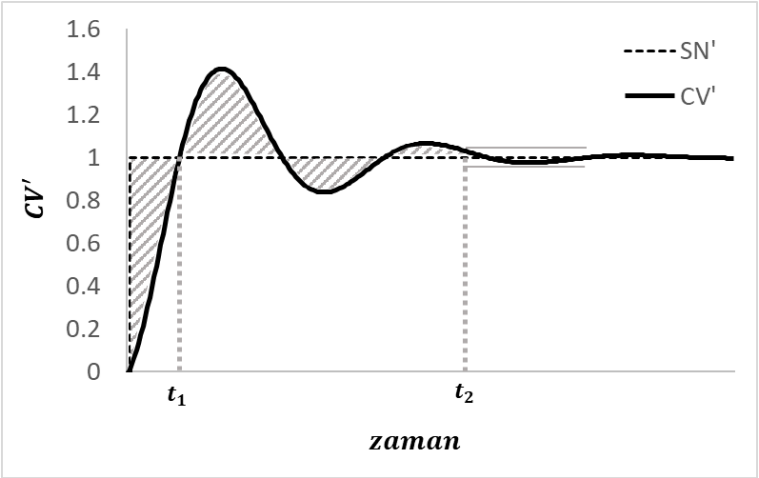
bozan etkenlerin gözden kaçırılma ihtimali, ileri beslemeli kontrol yönteminin güvenilirliğini zayıflatmaktadır.

İleri beslemeli kontrolde bir başka zorluk, bozan etken değişkeni, ayarlanabilen değişken ve kontrol edilen değişken arasındaki ilişkinin matematiksel modelini gerektirmesidir. Bozan etken değişkeninde örneğin bir birimlik bir değişimin, kontrol edilen değişken üzerinde yapacağı etkiyi nötrlemek için ayarlanan değişkende kaç birimlik bir değişim gerçekleştirilmeli problemine yanıt verecek bir denkleme ihtiyaç duyulur.

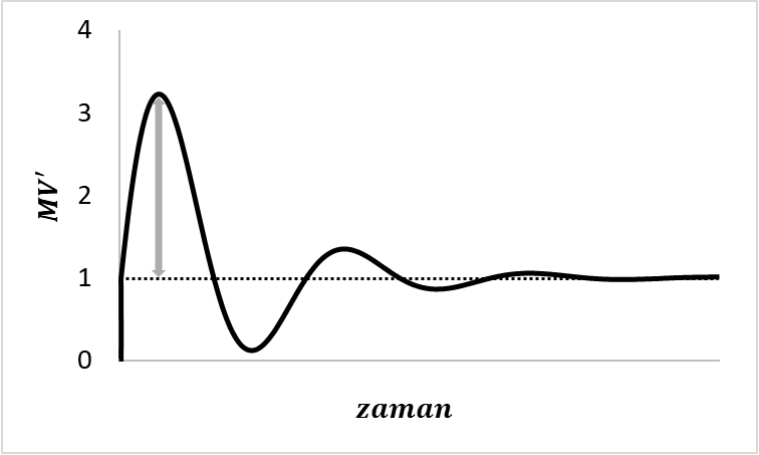
6.4 Kontrol Performansı Ölçütleri

Kontrol ediciler, proseste kontrol edilen değişkeni belirli bir set noktasında tutmak için kullanılırlar. Proseslerin mevcut kararlı hallerinin bozulması iki sebepten kaynaklanır. Bunlardan birincisi bozan etken değişkeninde oluşan sapmalardır. Bunlar istemsizdir ve kontrol edilen değişken üzerinde yapacakları etki kontrol ediciler (operatörler) ile azaltılmaya veya tamamen giderilmeye çalışılır.

Proseslerin mevcut kararlı hallerinin bozulmasının ikinci sebebi set noktası değişikliğidir. Bu değişiklik istemli olarak yapılır. Kontrol edilen değişken örneğin sıcaklıksa, sıcaklığı 70^oC'de sabit tutmak yerine 90^oC'de sabit tutmak hedeflenmiş olabilir. Set noktası değiştiğinde kontrol edici, ayarlanan değişken vasıtasıyla sistem sıcaklığının 70^oC'den 90^oC'ye kadar yükselmesini sağlar.



Şekil 6.5. Kontrol sisteminin devrede olduğu bir proseste set noktasındaki (SN') basamak değişimine karşı kontrol edilen değişkende (CV') yaşanan değişim davranışı.



Şekil 6.6. Prosesi yeni set noktasına taşımak için kontrol edicinin ayarlanan değişkene (MV') yaptığı müdahalenin zamana bağlı değişimi.

Proses kontrol hedefini gerçekleştirmek üzere kullanılabilecek çeşitli yöntemler, kontrol modları ve kontrol algoritmaları vardır. Bu çok seçenekli durumda hangi seçeneğin diğerinden daha etkili bir kontrol sağladığını ifade edebilmek üzere çeşitli performans ölçütleri

bulunmaktadır. Bu ölçütler kullanılarak bir kontrol döngüsünün kontrol performansı değerlendirilebilir.

Şekil 6.5'te bir kontrol döngüsünün performansı görülmektedir. Set noktasında (SN) birim basamak değişiminin yaşandığı ve buna karşı kontrol sisteminin devreye girdiği görülmektedir. Kontrol edici, ayarlanabilen değişkeni (MV) değiştirerek kontrol edilen değişkeni (CV) yeni set noktasında taşımaktadır. Burada t_1, CV değişkeninin hedef değere ilk ulaştığı ana kadar geçen **yükseliş zamanını**, t_2 ise CV değişkeninin hedef değerde kararlı hale geldiği **yatışma zamanını** göstermektedir. Yükseliş ve yatışma zamanının kısa olması prosesin hızla, üretim yapılabilir güvenli aralığa ulaşmasını sağlamaktadır. Eğrinin üstünde ve altındaki taralı alanlar geçiş sürecinde yaşanan hatanın miktarı ile ilişkilendirilmektedir. Alan hesabı aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmaktadır.

$$Alan = \int_0^\infty |SN'(t) - CV'(t)|\, dt \tag{6-1}$$

Şekil 6.5'te CV'deki hatanın belirli bir zaman sonra yeni set noktasına tam olarak ulaşarak sıfırlandığı görülmektedir. Dolayısıyla burada set noktası ile CV arasında bir **açıklık (*offset*)** görülmemektedir.

Şekil 6.6'da kontrol edicinin ayarlanan değişkene yaptığı müdahalenin seyri görülmektedir. Ayarlanan değişken ilk anlarda denge değerinin çok üzerinde olan bir noktaya çıkarılmıştır. Bu nokta maksimum sapma miktarını belirlemektedir. Bu işlem CV'nin hızla yeni set noktasına ulaşmasını sağlamak için yapılmaktadır. Ayarlanan değişkenlerin çıkarılabileceği maksimum değer bellidir. Ayarlanan değişken eğer bir vananın açıklığının yüzdelik ifadesi ise ayarlanan değişken %100'e

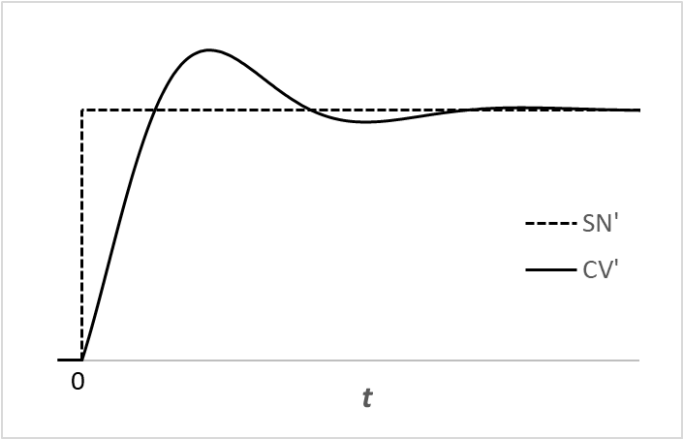
kadar çıkarılabilir. Bu limitler kontrol döngüsü tasarımı sırasında hesaba katılmalı ve ona göre yeterli kapasitesi olan bir ayarlanan değişken tercihi yapılmalıdır.

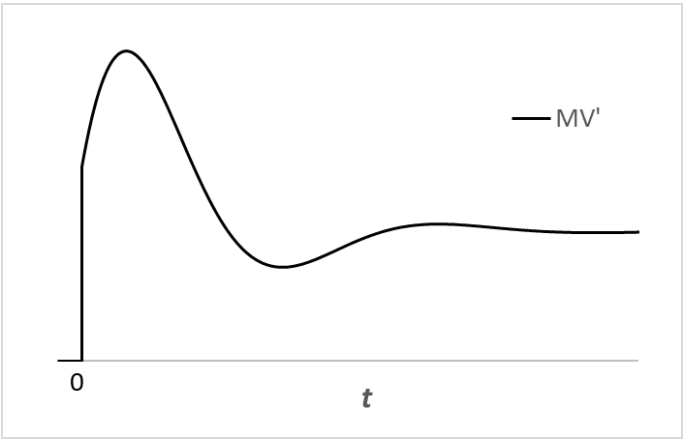
Bir proses kontrol sisteminin performansının iyi olarak kabul edilmesi için aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekir.

- Yükseliş Zamanı: Kısa
- Yatışma Zamanı: Kısa
- Offset: Yok
- Salınım: Düşük şiddette, geçici ve hızla sönümlenen
- CV'de Maksimum Sapma: Düşük
- MV'de Maksimum Sapma: Düşük

ÖRNEK 6.1

Set noktasında basamak değişimi yapılan proseste CV' ve MV' değişkenlerinin zaman bağlı değişim grafiği verilmiştir. Proses kontrol performans ölçütleri ile bu kontrol sisteminin performansını değerlendiriniz.



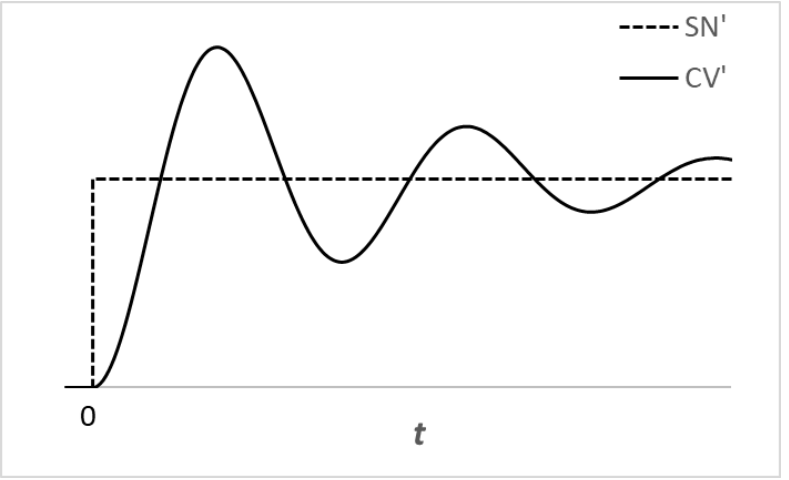


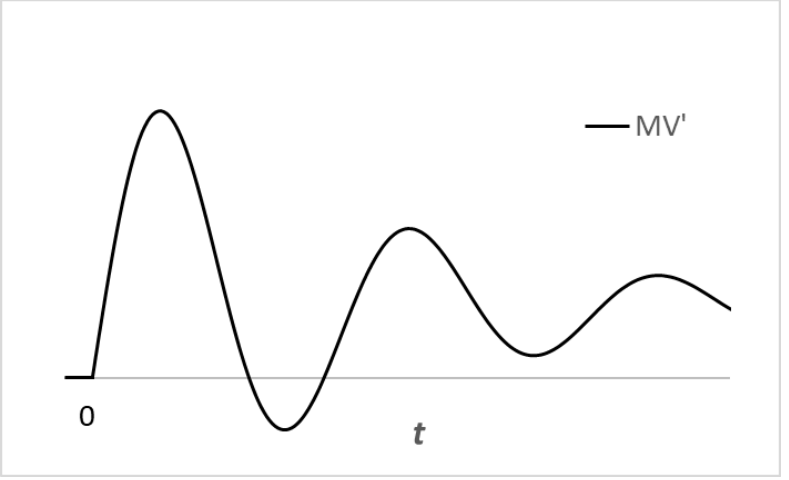
ÇÖZÜM

Yükseliş ve yatışma zamanının kısa olduğu, offsetin olmadığı, salınımın geçici olduğu görülmektedir. CV'deki maksimum sapma düşük kalmıştır. MV'deki maksimum sapma, yeni karar noktasının yaklaşık iki katı olmuştur. Bu özellikleriyle buradaki performans kabul edilebilir bir performans olarak değerlendirilebilir.

ÖRNEK 6.2

Set noktasında basamak değişimi yapılan proseste CV' ve MV' değişkenlerinin zaman bağlı değişim grafiği verilmiştir. Proses kontrol performans ölçütleri ile bu kontrol sisteminin performansını değerlendiriniz.



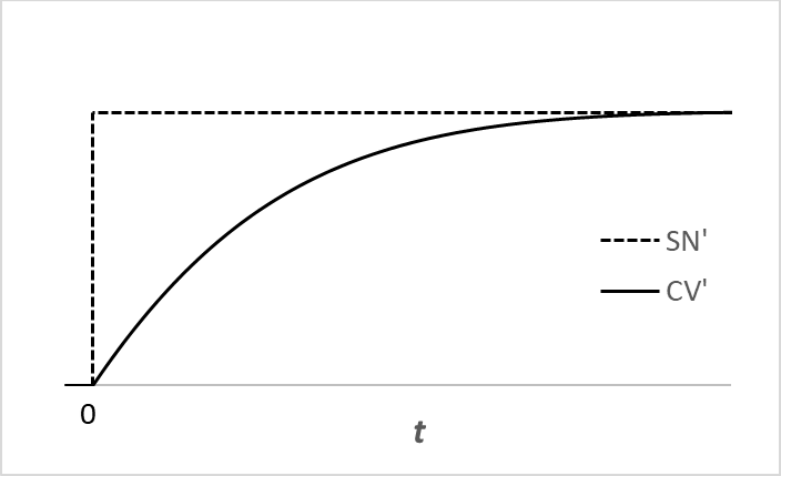


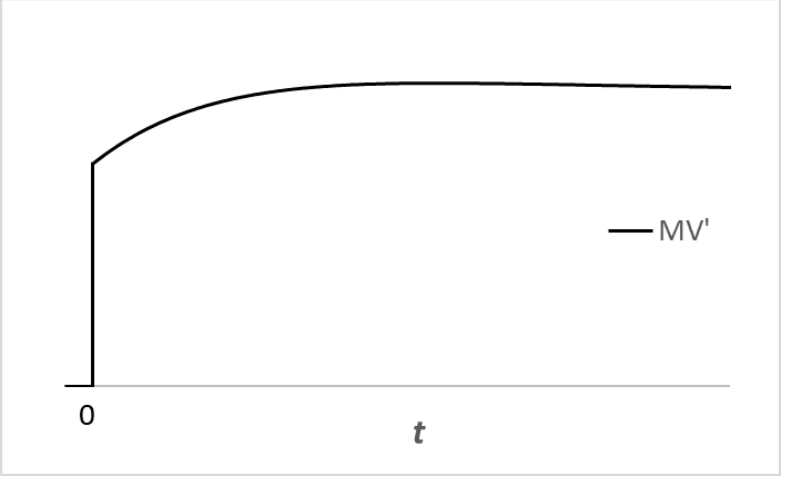
ÇÖZÜM

Yükseliş zamanının kısa, yatışma zamanının uzun olduğu görülmektedir. Offsetin ilerleyen zamanda sıfıra yaklaşacağı anlaşılmaktadır. Salınım geçici olmakla birlikte çok yavaş hızda sönümlenmektedir. CV ve MV'deki maksimum sapmalar yüksektir. Bu özellikleriyle buradaki performans iyi bir performans olarak değerlendirilemez.

ÖRNEK 6.3

Set noktasında basamak değişimi yapılan proseste CV' ve MV' değişkenlerinin zaman bağlı değişim grafiği verilmiştir. Proses kontrol performans ölçütleri ile bu kontrol sisteminin performansını değerlendiriniz.





ÇÖZÜM

Yükseliş ve yatışma zamanının uzun olduğu görülmektedir. Offset sıfırlanmıştır. Salınım göstermemiştir. CV ve MV sapma göstermemiştir. Bu özellikleriyle buradaki performans yavaş bir performans olarak değerlendirilebilir. Sistem yeni set noktasına yavaş bir hızda ulaşmıştır. Bu sırada yapılan üretim sorunlu olacağı için bu durum üretim verimini olumsuz etkiler.

7 GERİ BESLEMELİ KONTROL

Geri beslemeli kontrol döngülerinde kullanılan kontrol edicilerde üç temel mod vardır. Bunlar oransal (*proportional*), integral (*integral*) ve türevsel (*derivative*) modlardır.

7.1 Oransal Kontrol

Oransal kontrolde amaç sapma miktarını, yani hatayı, sapma miktarının belirli bir katıyla orantılı olarak azaltmaktır. Hata, istenen değerle (set noktası) ölçülen değer (kontrol edilen değişken) arasındaki farktır.

$$e(t) = SN'(t) - CV'(t) \tag{7-1}$$

Kararlı halde $SN'(t)$ ve $CV'(t)$ sıfıra eşit oldukları için $e(t)$ de sıfırdır. Ancak prosesin bozan etken değişkeninde (DV) bir değişim olduğunda kontrol altında tutulan değişkende değişim olur. Böylece $e(t)$ sıfırdan sapar. Aynı şekilde set noktasında değişiklik yapılırsa $e(t)$ yine sıfırdan sapmış olur. Oransal kontrol, sapma miktarıyla orantılı olacak şekilde, ayarlanan değişkene müdahale edilmesini sağlar. Ayarlanan değişken (MV) ile $e(t)$ arasındaki ilişki oransal kontrolde aşağıdaki gibidir.

$$MV(t) = \overline{MV} + K_c e(t) \tag{7-2}$$

Burada $\overline{MV}$ ayarlanan değişkenin kararlı hal değeridir. $MV(t)$ ve $\overline{MV}$ birbirine eşit ise hata sıfıra eşit olur. K_c, kontrol edici kazanç katsayısıdır. Mühendis tarafından manuel olarak ayarlanabilir veya otomatik olarak kontrol edici tarafından ayarlanır. K_c, kontrol edicinin sapma (hata)

miktarına karşı hassasiyet derecesini belirler. K_c için büyük sayı kullanılırsa prosesdeki değişime karşı daha güçlü bir müdahale yapılmış olur.

Ayarlanabilen değişkenin negatif veya pozitif yönde alabileceği maksimum değerler vardır. Bu değerler prosese yapılabilecek müdahalenin son noktalarıdır. Dolayısıyla kontrol ediciler (operatörler) müdahale aracına, örneğin bir vanaya, komut gönderirken maksimum ve minimum değerleri göz önünde bulundurarak, yani belirli bir kısıt altında, bunu yaparlar.

Denklem (7-2), aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir ve sapma değişkenleri formunda yazılabilir.

$$MV(t) - \overline{MV} = K_c e(t)$$

$$MV'(t) = K_c e(t) \tag{7-3}$$

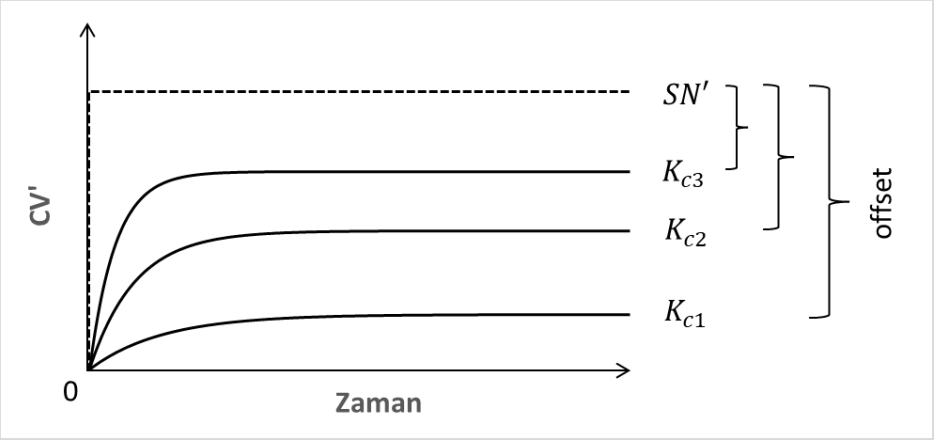
Oransal kontroldeki $MV'(t)$ ve $e(t)$ arasındaki bu ilişkinin Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki transfer fonksiyonu elde edilir.

$$MV'(s) = K_c E(s)$$

$$\frac{MV'(s)}{E(s)} = K_c \tag{7-4}$$

Şekil 7.1'de oransal kontrolün set noktası değişimi karşısındaki performansı gösterilmiştir. Manuel olarak seçilen K_c değeri, düşük tutulduğunda yükseliş zamanının ve offsetin arttığı görülmektedir. K_c değerinin yükseltilmesi offseti azaltsa bile sıfırlamamaktadır. Bu durum oransal kontrolün tipik özelliğidir. Az miktarda offsetin sorun

oluşturmayacağı proseslerde oransal kontrol tek başına kullanılabilir. Offseti sıfırlamak için oransal kontrole integral modun da ilave edilerek birlikte kullanılması gerekir. Oransal kontrolün diğer modlara göre avantajı yükseliş zamanını hızla düşürmesidir.



Şekil 7.1. Farklı K_c değerlerinde ($K_{c3} > K_{c2} > K_{c1}$) oransal kontrolün set noktası değişimine karşı performansı.

7.2 İntegral Kontrol

İntegral kontrolde kontrol edici çalıştığı süre boyunca oluşan hataların integrali alınır. Ayarlanan değişken ile hata arasındaki ilişki integral kontrolde aşağıdaki gibidir.

$$MV(t) = \overline{MV} + \frac{K_c}{T_i}\int_0^t e(t)dt \tag{7-5}$$

Burada K_c, kontrol edicinin kazanç katsayısını, T_i ise integral zamanını gösterir. K_c'nin bu eşitlikte yer alması zorunlu değildir. $K_c = 1$ olarak ayarlandığında devre dışı kalmış olur. Bu eşitlikte mühendis tarafından

belirlenen katsayı K_c/T_i için veya $1/T_i$ içindir. Bu katsayılar bilgisayar yardımıyla optimize edilebilmektedir.

Denklem (7-5), aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir ve sapma değişkenleri formunda yazılabilir.

$$MV(t) - \overline{MV} = \frac{K_c}{T_i}\int_0^t e(t)dt$$

$$MV'(t) = \frac{K_c}{T_i}\int_0^t e(t)dt \tag{7-6}$$

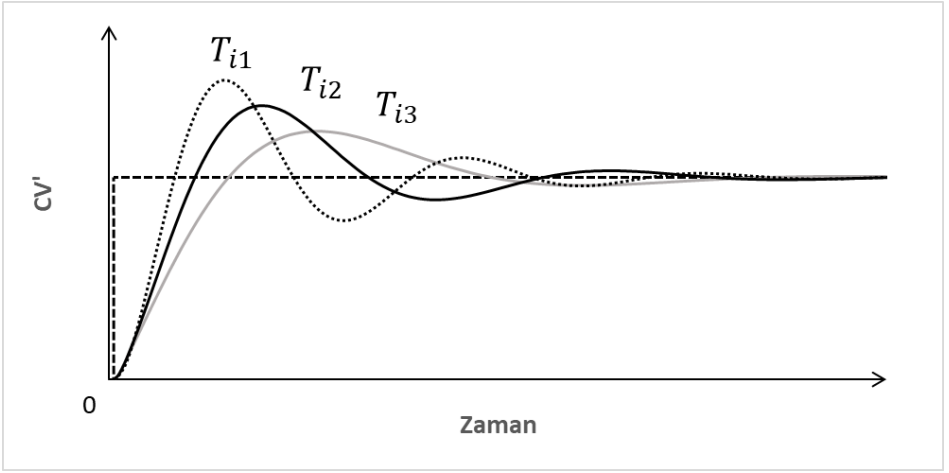
İntegral kontroldeki $MV'(t)$ ve $e(t)$ arasındaki bu ilişkinin Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki transfer fonksiyonu elde edilir.

$$MV'(s) = \frac{K_c\, E(s)}{T_i\, s}$$

$$\frac{MV'(s)}{E(s)} = \frac{K_c}{T_i\, s} \tag{7-7}$$

İntegral kontrol oransal kontrol ile birlikte kullanılan bir kontrol modudur. Şekil 7.2'de bir oransal-integral (PI) kontrolde $T_{i3} > T_{i2} > T_{i1}$ olmak üzere farklı T_i değerleri ile elde edilen proses yanıtları gösterilmiştir. Proses yanıtları set noktası değişimine karşı alınmıştır. Grafiğe göre T_i tercihinin küçük tutulması yükseliş zamanını azaltsa da salınım şiddetini artırmaktadır.

Tüm T_i değerleri için offsetin sıfıra gittiği görülmektedir. İntegral kontrolün oransal kontrole katkısı offseti sıfırlamasıdır. Böylece hedeflenen set noktasına tam olarak ulaşılmaktadır.



Şekil 7.2. Farklı T_i değerlerinde ($T_{i3} > T_{i2} > T_{i1}$) PI kontrol edicinin set noktası değişimine karşı performansı.

7.3 Türevsel Kontrol

Türevsel kontrolde hatanın oluşum hızını dikkate alan ve ayarlanan değişkeni buna göre belirleyen bir yaklaşım söz konusudur. Ayarlanan değişken ile hata arasındaki ilişki türevsel kontrolde aşağıdaki gibidir.

$$MV(t) = \overline{MV} + K_c T_d \frac{de(t)}{dt} \tag{7-8}$$

Burada K_c, kontrol edicinin kazanç katsayısını, T_d ise türev zamanını gösterir. K_c'nin bu eşitlikte yer alması yine zorunlu değildir. $K_c = 1$ olarak ayarlandığında devre dışı kalmış olur. Bu eşitlikte mühendis tarafından belirlenen katsayı $K_c T_d$ için veya T_d içindir. Bu katsayılar bilgisayar programı yardımıyla optimize edilebilmektedir.

Denklem (7-8), aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir ve sapma değişkenleri formunda yazılabilir.

$$MV(t) - \overline{MV} = K_c T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$MV'(t) = K_c T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (7\text{-}9)$$

Türevsel kontroldeki $MV'(t)$ ve $e(t)$ arasındaki bu ilişkinin Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki transfer fonksiyonu elde edilir.

$$MV'(s) = K_c\, T_d\, s\, E(s)$$

$$\frac{MV'(s)}{E(s)} = K_c\, T_d\, s \quad (7\text{-}10)$$

Türevsel kontrol, ayarlanan değişkene hatanın oluşum hızı üzerinden müdahale ettiği için bazı durumlarda aşırı tepkisel olabilmektedir. Örneğin set noktası aniden değiştirildiğinde CV'deki değişim anlık olmayacağı için hatanın oluşum hızı yüksek olacaktır. Türevsel kontrolün bu duruma vereceği yanıt, MV'yi benzer bir hızla yükseltme yönünde olacaktır. Bu durum ekipmana zarar vermek başta olmak üzere çeşitli problemlere yol açabilir. Benzer tepkiler anlık sensör gürültüleri sırasında da alınabilmektedir. Dolayısıyla türevsel kontrolün set noktası değişimlerinde ve gürültülü ölçümlerde kullanılabilmesi alternatif algoritmalarla mümkün olabilir. Bu alternatiflerden biri türevsel kontrolde hatanın oluşum hızı yerine CV'deki değişim hızının negatifinin kullanılmasıdır. Negatiflik denklem (7-1)'deki hata (e) ve CV' arasındaki negatif ilişkiden dolayıdır. Bu algoritma denklem (7-8)'in yeniden aşağıdaki gibi tanımlanmasını sağlar.

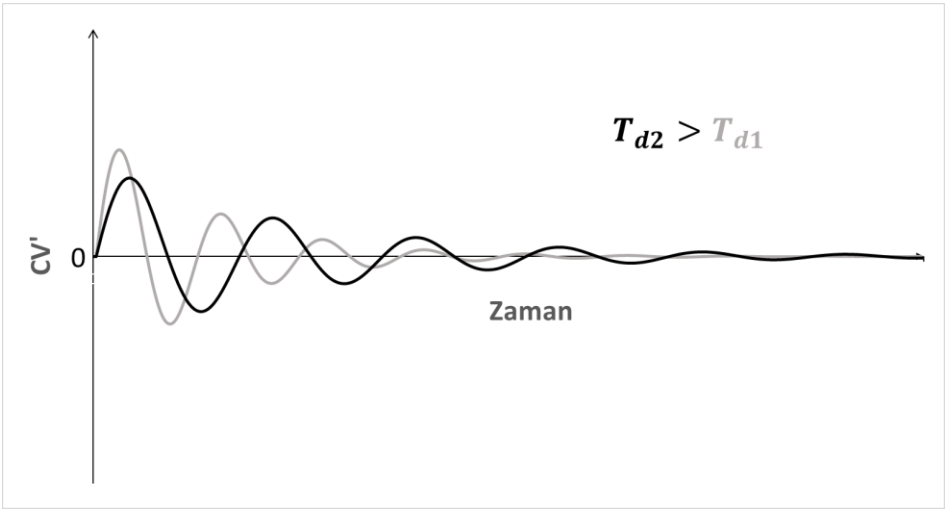
$$MV(t) = \overline{MV} - K_c T_d \frac{dCV'(t)}{dt} \tag{7-11}$$

Denklem (7-11) sapma değişkenleri formunda yazılır ve Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki transfer fonksiyonu elde edilir.

$$MV'(s) = -K_c\, T_d\, s\, CV'(s)$$

$$\frac{MV'(s)}{CV'(s)} = -K_c\, T_d\, s \tag{7-12}$$

Türevsel kontrol, oransal kontrol ile veya oransal-integral kontrol ile birlikte kullanılan bir kontrol modudur. Oransal-türevsel kontrol "PD kontrol" şeklinde, oransal-integral-türevsel kontrol ise "PID kontrol" şeklinde isimlendirilir.



Şekil 7.3. Bozan etken değişkeninde oluşan basamak değişimine farklı T_d değerlerine ($T_{d2} > T_{d1}$) sahip PID kontrolün etkisi.

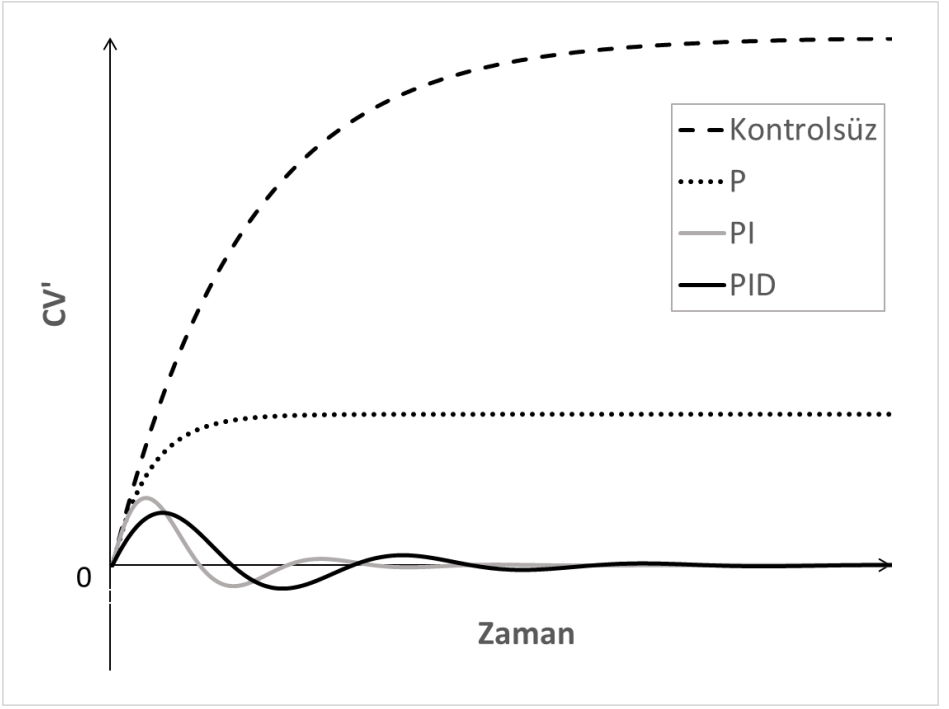
Şekil 7.3, set noktası değişiminin olmadığı ve bozan etken değişkeninde basamak değişiminin olduğu bir proseste PID kontrol edicinin farklı T_d değerleri için performansını göstermektedir. T_d değerinin artırılması ile salınımın şiddetinin azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla türevsel modun kontrole katkısı meydana gelebilecek salınımları azaltmasıdır.

7.4 PID Kontrol

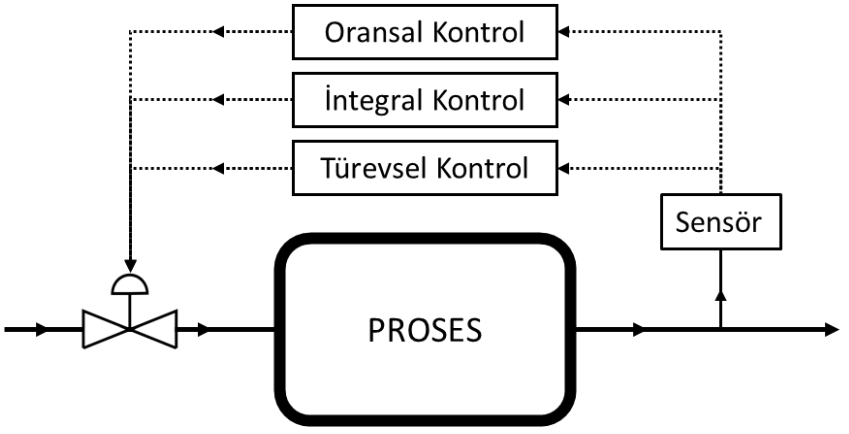
Oransal kontrol tek başına kullanılabilen bir kontrol modudur. Ancak integral ve türevsel modlar, oransal kontrol ile birlikte kullanılırlar. Kontrol sistemleri içinde en yaygın kullanım üçünün birlikte oluşturduğu PID kontrol sistemleridir. PID kısaltması; oransal, integral ve türevsel kelimelerinin İngilizce karşılıkları olan *proportional, integral, derivative* kelimelerinin baş harflerinden ibarettir. Bu isimlendirme sistematiğine göre diğer kontrol modları da şu şekilde ifade edilirler:

- P: Oransal kontrol
- PI: Oransal-İntegral kontrol
- PD: Oransal-Türevsel kontrol
- PID: Oransal-İntegral-Türevsel kontrol

Şekil 7.4'te üç kontrol stratejisinin ve kontrolsüz durumun ortaya çıkardığı proses yanıtları görülmektedir. Oransal kontrolün tek başına önemli ölçüde sapmayı azalttığı görülmektedir. Ancak, tek başına sapmayı sıfırlayamamıştır. Oransal kontrol, integral kontrol ile birlikte kullanıldığında offsetin sıfırlandığı ancak bu defa da salınımlı, dalgalanmalı bir proses yanıtının oluştuğu görülmektedir. Oransal-integral kontrole türevsel kontrol de eklendiğinde salınım ve dalgalanmalar belli oranda sönümlenmiştir.



Şekil 7.4. Bozan etken değişkeninde meydana gelen basamak değişimine karşı farklı senaryoların işletilmesi ve ortaya çıkan kontrol performansları.



Şekil 7.5. PID kontrolün paralel formu.

Şekil 7.5'de paralel formdaki PID kontrolün şeması gösterilmiştir. Kontrol edilen değişkene dair güncel değer sensörde ölçülür ve kontrol ediciye iletilir. Kontrol edici ilk olarak $e(t)$'yi, yani hatayı, hesaplar. Sonrasında proses için önceden optimize edilerek belirlenmiş oransal kontrol kazancı (K_c), integral zamanı (T_i) ve türevsel zaman (T_d) terimleri üzerinden bir MV' değeri oluşturur ve bunu kontrol vanasına iletir. Böylece döngü tamamlanmış olur. Üç kontrol modunun paralel formda birleştirilmesi ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

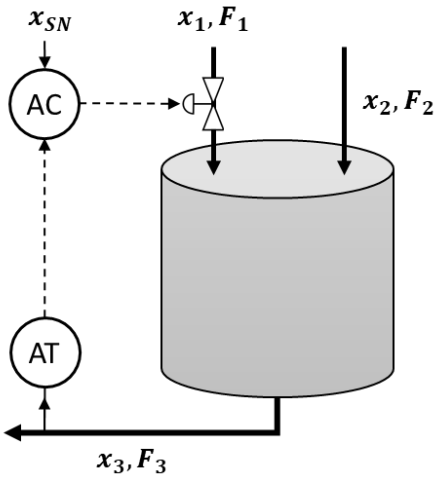
$$MV(t) = \overline{MV} + K_c \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt - T_d \frac{dCV'(t)}{dt} \right] \qquad (7\text{-}13)$$

Oransal, integral ve türevsel kontrol için transfer fonksiyonları sırasıyla denklem (7-4),(7-7) ve (7-12)'te verilmişti. PID kontrol için transfer fonksiyonu $G_c(s)$ bu durumda aşağıdaki gibi olur.

$$G_c(s) = \frac{MV'(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i\, s} - K_c\, T_d\, s \qquad (7\text{-}14)$$

Bir PID kontrol edici için bazı katsayıların ayarlanması gerekir. Bunlar oransal kontrolün şiddetini belirleyen K_c, integral kontrolün şiddetini belirleyen T_i ve türevsel kontrolün şiddetini belirleyen T_d'dir. Bu katsayılar mühendis tarafından proses simülasyonu üzerinden manuel olarak ayarlanabilir. Bu ayarlama ayrıca proses kontrol diyagramları ile manuel olarak veya bazı algoritmalar ile sistematik olarak yapılabilmektedir.

ÖRNEK 7.1



Bir karıştırmalı tanka biri kontrollü diğeri kontrolsüz iki giriş hattı bağlıdır. Tank içindeki yoğunluk ρ (kg/m^3) ve hacim V (m^3) sabittir. Kontrol vanası ile ayarlanabilen girişteki debi F_1 (kg/dk)'dır. A maddesinin bu hattaki kütlesel oranı x_1'dir ve sabittir. Kontrolsüz girişteki debi F_2 (kg/dk) ve A maddesinin kütlesel oranı x_2'dir. A maddesinin tank çıkışındaki kütlesel oranı x_3 ve çıkıştaki toplam debi F_3 (kg/dk)'dır. Başlangıçta sistem dengededir ve sistemin çok iyi karıştığı varsayılmaktadır.

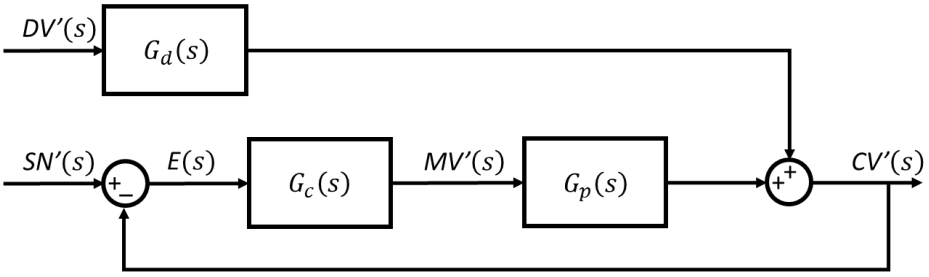
a) Bu sistemde CV, MV ve DV değişkenlerini belirleyiniz.
b) Set noktası değişimi ve bozan etken değişkeninin CV' üzerine etkisinin blok diyagramını çiziniz.
c) Blok diyagramı üzerinden $\frac{E(s)}{SN'(s)}$ transfer fonksiyonunu türetiniz.
d) Blok diyagramı üzerinden $\frac{E(s)}{DV'(s)}$ transfer fonksiyonunu türetiniz.

ÇÖZÜM

a) Bu sistemdeki CV, MV ve DV değişkenlerini belirleyiniz.

Sistemde sensör olarak AT kullanıldığı ve bunun kompozisyon ölçümleriyle ilgili olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla kontrol edilen değişken burada x_3 değişkenidir. AC kontrol edicisinin bağlı olduğu hatta bir kontrol vanası vardır ve debiyi kontrol etmektedir. Dolayısıyla F_1 değişkeni burada ayarlanan değişkendir. Kontrolsüz girişteki debi (F_2) ve kütlesel oran (x_2) bozan etken değişkenleri olabilir.

b) Set noktası değişimi ve bozan etken değişkeninin CV' üzerine etkisinin blok diyagramını çiziniz.



c) Blok diyagramı üzerinden $\frac{E(s)}{SN'(s)}$ transfer fonksiyonunu türetiniz.

$$E(s) = SN'(s) - G_p(s)G_c(s)E(s) + DV'(s)G_d(s)$$

$$E(s) + G_p(s)G_c(s)E(s) = SN'(s)$$

$$E(s)\left[1 + G_p(s)G_c(s)\right] = SN'(s)$$

$$\frac{E(s)}{SN'(s)} = \frac{1}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

d) Blok diyagramı üzerinden $\frac{E(s)}{DV'(s)}$ transfer fonksiyonunu türetiniz.

$$E(s) = SN'(s) - \left[G_p(s)G_c(s)E(s) + G_d(s)DV'(s)\right]$$

$$E(s) = 0 - \left[G_p(s)G_c(s)E(s) + G_d(s)DV'(s)\right]$$

$$E(s) + G_p(s)G_c(s)E(s) = -G_d(s)DV'(s)$$

$$E(s)\left[1 + G_p(s)G_c(s)\right] = -G_d(s)DV'(s)$$

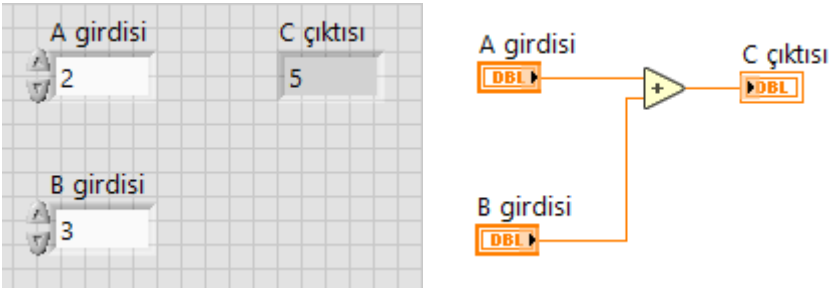
$$\frac{E(s)}{DV'(s)} = \frac{-G_d(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

8 KONTROL SİMULASYONU

Proses kontrol simülasyonu alanında kullanılan başlıca ticari yazılımlar, National Instruments şirketinin LabVIEW programı ile MatWorks şirketine ait MATLAB programının bir bileşeni olan Simulink programıdır. Bu iki program daha çok araştırma-geliştirme ve simülasyon amaçlı kullanılmaktadır.

8.1 LabVIEW ile Simülasyon

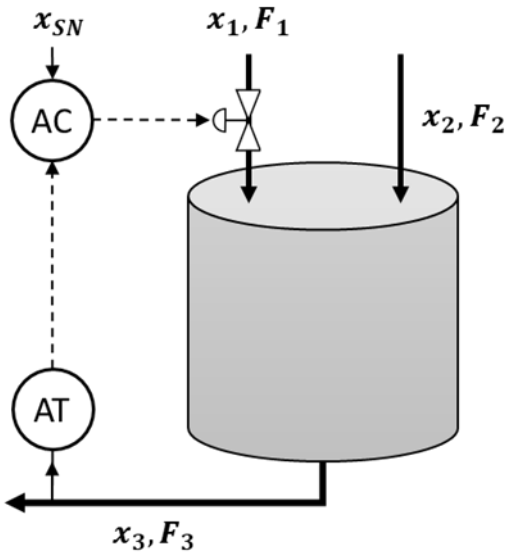
LabVIEW, mühendislerin araştırma, doğrulama ve üretim için test sistemleri geliştirmelerini sağlayan bir grafiksel programlama ortamıdır. LabVIEW'de yazılan programlara VI denir. Her VI bir ön panelden (*front panel*) ve bir blok diyagramdan (*block diagram*) oluşur. Ön panel kullanıcı arayüzünü, blok diyagram ise kaynak kodu oluşturur. Ön panelde kullanıcının veri girişi yapabileceği kontroller ve bir işlemin sonucunu görebileceği göstergeler yer alır. Şekil 8.1'de örnek bir işlem için ön panel ve blok diyagramın görünümü verilmiştir.



Şekil 8.1. LabVIEW programlama ortamında ön panel ve blok diyagram örneği

LabVIEW temel programlama ortamı ücretsiz olarak şirket tarafından kullanıcılara sunulmaktadır. Ancak çeşitli amaçlar için geliştirilmiş modüller 7 günlük ücretsiz deneme süresinden sonra ücretli olarak kullandırılmaktadır. Proses kontrol simülasyonu için Kontrol ve Simülasyon adlı LabVIEW modülü sunulmaktadır.

ÖRNEK 8.1



Bir karıştırmalı tanka biri kontrollü diğeri kontrolsüz iki giriş hattı bağlıdır. Tank içindeki yoğunluk $\rho = 800$ (kg/m^3) ve hacim $V = 0.5$ (m^3) sabittir. Kontrol vanası ile ayarlanabilen girişteki debi $F_1 = 4$ (kg/s)'dır. A maddesinin bu hattaki kütlesel oranı $x_1 = 1$'dir ve sabittir. Kontrolsüz girişteki debi $F_2 = 4$ (kg/s) ve $x_2 = 0.2$'dir. A maddesinin tank çıkışındaki kütlesel oranı x_3 ve çıkıştaki toplam debi F_3 (kg/s)'dır. Başlangıçta sistem dengededir ve sistemin çok iyi karıştığı varsayılmaktadır.

a) Sistem dengede olduğuna göre x_3, F_3 ve SN değerlerini hesaplayınız.
b) Set noktasında 0.1'lik artış yapılması senaryosu için LabVIEW ile PID simülasyonu yaparak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.
c) Bozan etken değişkeni olan x_2'de 0.1'lik artış meydana gelmesi senaryosu için LabVIEW PID simülasyonunu kullanarak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.

ÇÖZÜM

a) Sistem dengede olduğuna göre x_3, F_3 ve SN değerlerini hesaplayınız.

Hacim sabit olduğu için toplam kütle denkliği ile F_3 bulunabilir.

$$F_3 = F_1 + F_2$$

$$F_3 = 4 + 4 = 8\ \mathrm{kg/s} \tag{8-1}$$

x_3 ise bileşen kütle denkliği ile bulunur.

$$x_3\,F_3 = x_1\,F_1 + x_2\,F_2$$

$$8x_3 = 4 + 0.8 \qquad (8\text{-}2)$$

$$x_3 = 0.6$$

SN ise aşağıdaki eşitlik ile bulunur.

$$Hata = SN - CV \qquad (8\text{-}3)$$

Sistem dengede olduğuna göre $Hata$ sıfıra eşitlenebilir. Burada CV değişkeni x_3 olduğu için değeri 0.6'dır. Bu durumda SN,

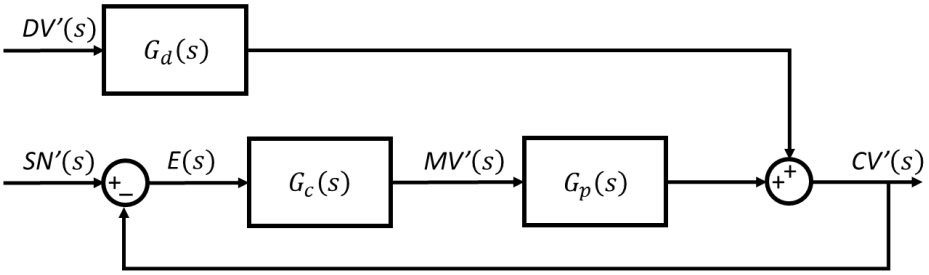
$$0 = SN - 0.6$$

$$SN = 0.6 \qquad (8\text{-}4)$$

olarak bulunur.

b) Set noktasında 0.1'lik artış yapılması senaryosu için LabVIEW ile PID simülasyonu yaparak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.

1. Adım: Sistem için bir blok diyagram oluşturulur.



2. Adım: Blok diyagramdaki transfer fonksiyonları olan $G_d(s)$, $G_c(s)$ ve $G_p(s)$ türetilir.

$G_d(s)$, denklem (4-21)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_d(s) = \frac{CV'(s)}{DV'(s)} = \frac{X_3'(s)}{X_2'(s)} = \frac{K_d}{\tau s + 1}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}} = \frac{800 \times 0.5}{8} = 50$$

$$K_d = \frac{\overline{F_2}}{\overline{F_3}} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Bu durumda $G_d(s)$ aşağıdaki gibi olur.

$$G_d(s) = \frac{0.5}{50s + 1} \tag{8-5}$$

$G_p(s)$, denklem (5-16)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_p(s) = \frac{CV'(s)}{MV'(s)} = \frac{{X_3}'(s)}{{F_1}'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}} = \frac{800 \times 0.5}{8} = 50$$

$$K_p = \frac{x_1 - \overline{x_3}}{\overline{F_3}} = \frac{1 - 0.6}{8} = 0.05$$

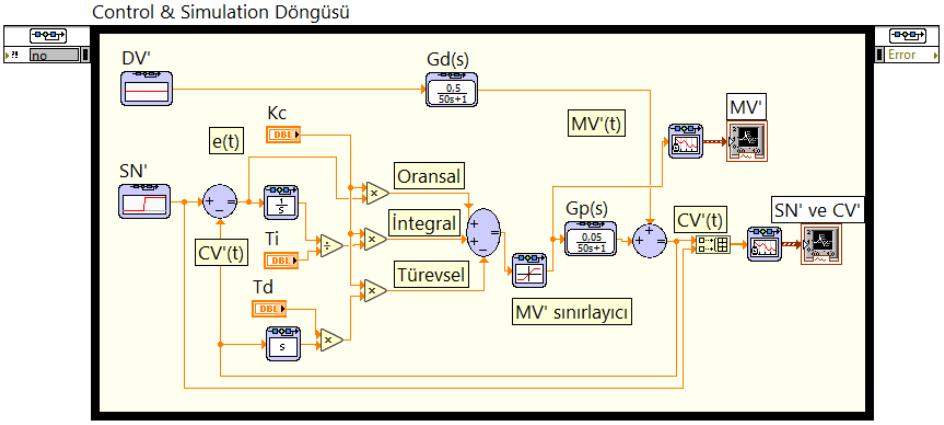
Bu durumda $G_p(s)$ aşağıdaki gibi olur.

$$G_p(s) = \frac{0.05}{50s + 1} \tag{8-6}$$

$G_c(s)$, denklem (7-14)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_c(s) = \frac{MV'(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i\, s} - K_c\, T_d\, s \tag{8-7}$$

3. Adım: LabVIEW'de programlama yapılır. Türetilen $G_d(s)$, $G_c(s)$ ve $G_p(s)$ fonksiyonları konumlarına yerleştirilir.



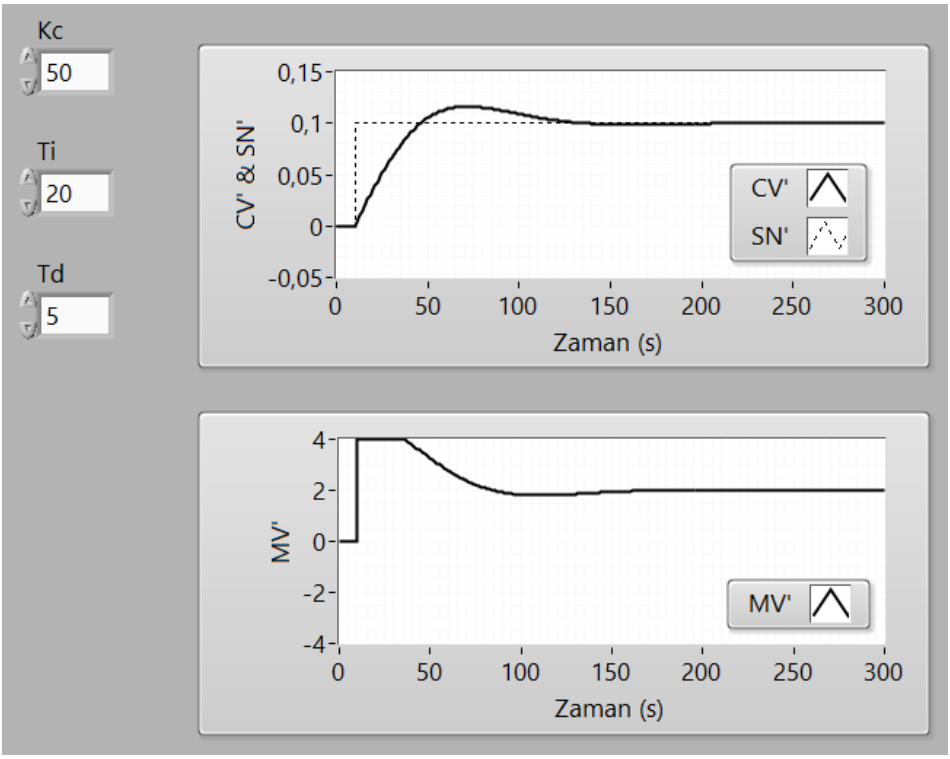
Şekil 8.2. LabVIEW'de PID kontrol döngüsü tasarımı.

Burada $G_c(s)$'nin bileşenleri olan $[K_c]$, $\left[\frac{K_c}{T_i\, s}\right]$ ve $[K_c\, T_d\, s]$ ayrı ayrı yerleştirilmiştir. LabVIEW, PID kontrolün tüm bileşenlerini taşıyan hazır blok fonksiyonlara da sahiptir. Ancak bunlar tipik PID algoritmasından farklı olabilmektedir. Burada denklem (7-14)'te verilen PID algoritmasının bileşenleri ile birlikte kullanımını göstermek adına hazır PID bloklarını kullanmadık.

Şekil 8.2'de metin kutularının bilgi verme dışında bir işlevi yoktur. Burada ayrıca MV' için sınırlayıcı koyulmuştur. Bu, MV değişkeninin sıfırın altına düşmesini önlemekte ve artışı %100'e kadar olacak şekilde sınırlamaktadır.

4. Adım: Simülasyon çalıştırılarak SN' için 0.1'lik basamak değişimine karşı MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafikleri elde edilir. Farklı K_c, T_i ve T_d değerleri test edilerek uygun değerler tespit

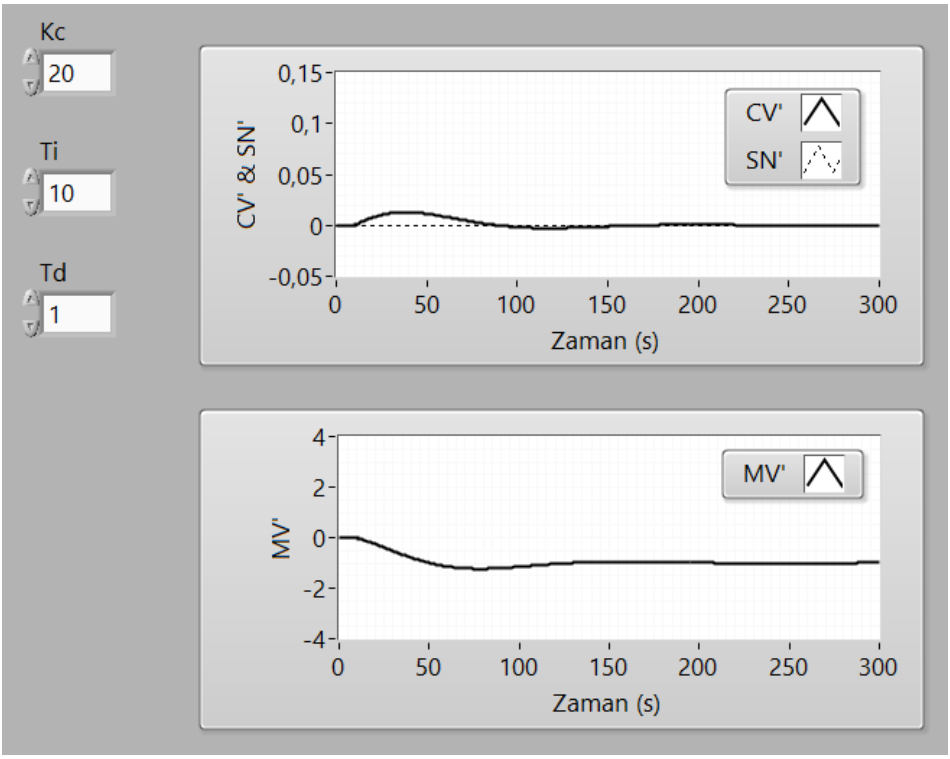
edilir. Uygun değerlerin tespiti için bölüm 6.4'te verilen kontrol performansı ölçütleri dikkate alınmalıdır.



Şekil 8.3. Set noktasında 10. saniyede 0.1'lik artış yapıldığında $K_c = 50$, $T_i = 20$ *ve* $T_d = 5$ *değerleri için* MV' *ve* CV' *değişkenlerinin zamana bağlı değişimleri.*

MV' için sınırlayıcı kullanıldığından dolayı belli bir süre izin verilen maksimum değerde seyretmiş daha sonra yavaş yavaş karar noktasına doğru azalma göstermiştir. Sistemde 10. saniyede değişim meydana gelmiştir. Offset oluşmadığı, yükseliş zamanının 40 s ve yatışma zamanının 100 s civarında olduğu görülmektedir.

c) Bozan etken değişkeni olan x_2'de 0.1'lik artış meydana gelmesi senaryosu için LabVIEW PID simülasyonunu kullanarak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.



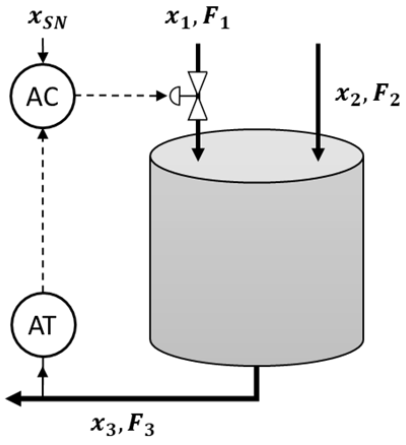
Şekil 8.4. Set noktası sabit tutulup bozan etken değişkeninde 10. saniyede 0.1'lik artış yapıldığında $K_c = 20$, $T_i = 10$ ve $T_d = 1$ değerleri için MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişimleri.

Bozan etken değişkeninde artış olduktan 70 saniye sonra kontrol edilen değişkenin yeniden set noktasına ulaştığı, dolayısıyla offset oluşmadığı görülmektedir. Bu kontrol eyleminde ayarlanan değişken karar noktasına ulaştığında eski değeri olan 4 kg/s'den yaklaşık 3 kg/s'ye düşmüştür.

8.2 Simulink ile Simülasyon

Simulink MATLAB içerisinde yer alan bir blok diyagram ortamıdır. Kod yazmadan programlama yapmayı sağlayan grafiksel programlama araçlarından bir diğeridir. Gerçek dünyada yapılması planlanan çeşitli karmaşık işlerin veya ürünlerin bilgisayar ortamında simülasyonunu sağlar. Böylece birçok yönden ürünün veya işlemin test edilmesini mümkün hale getirir. Proses simülasyonunda en çok kullanılan araçlardan biridir. Bir PID kontrol edici için kazanç, integral zamanı ve türevsel zaman katsayılarının test edilmesi prosesin simülasyonunun yapılabilmesi ile kolay hale gelir. Proses simülasyonu oluşturabilmek için öncelikle ilgili transfer fonksiyonlarının türetilmesi bir başka deyişle prosesin modellenmesi gerekir. Fonksiyonların yanı sıra proses kazancı ve zaman sabiti terimlerinin de karşılıkları bulunur. Buraya kadar bir proseste iki değişken arasındaki ilişkinin transfer fonksiyonları ile modellenmesi ve proses kazancı ve zaman sabitinin tespit edilmesi detaylı olarak işlendi. Gerekli bu bilgiler hazır olduktan sonra Simulink kütüphanesinde bulunan hazır bloklar çalışma ortamına alınır ve bağlantıları yapılır.

ÖRNEK 8.2



Bir karıştırmalı tanka biri kontrollü diğeri kontrolsüz iki giriş hattı bağlıdır. Tank içindeki yoğunluk $\rho = 800$ (kg/m^3) ve hacim $V = 0.5$ (m^3) sabittir. Kontrol vanası ile ayarlanabilen girişteki debi $F_1 = 4$ (kg/s)'dır. A maddesinin bu hattaki kütlesel oranı $x_1 = 1$'dir ve sabittir.

Kontrolsüz girişteki debi $F_2 = 4$ (kg/s) ve $x_2 = 0.2$'dir. A maddesinin tank çıkışındaki kütlesel oranı x_3 ve çıkıştaki toplam debi F_3 (kg/s)'dır. Başlangıçta sistem dengededir ve sistemin çok iyi karıştığı varsayılmaktadır.

a) Sistem dengede olduğuna göre x_3, F_3 ve SN değerlerini hesaplayınız.
b) Set noktasında 0.1'lik artış yapılması senaryosu için Simulink ile PID simülasyonu yaparak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.
c) Bozan etken değişkeni olan x_2'de 0.1'lik artış meydana gelmesi senaryosu için Simulink PID simülasyonunu kullanarak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.

ÇÖZÜM

a) Sistem dengede olduğuna göre x_3, F_3 ve SN değerlerini hesaplayınız.

Hacim sabit olduğu için toplam kütle denkliği ile F_3 bulunabilir.

$$F_3 = F_1 + F_2$$

(8-8)

$$F_3 = 4 + 4 = 8 \text{ kg/s}$$

x_3 ise bileşen kütle denkliği ile bulunur.

$$x_3\,F_3 = x_1\,F_1 + x_2\,F_2$$

$$8x_3 = 4 + 0.8 \tag{8-9}$$

$$x_3 = 0.6$$

SN ise aşağıdaki eşitlik ile bulunur.

$$Hata = SN - CV \tag{8-10}$$

Sistem dengede olduğuna göre $Hata$ sıfıra eşitlenebilir. Burada CV değişkeni x_3 olduğu için değeri 0.6'dır. Bu durumda SN,

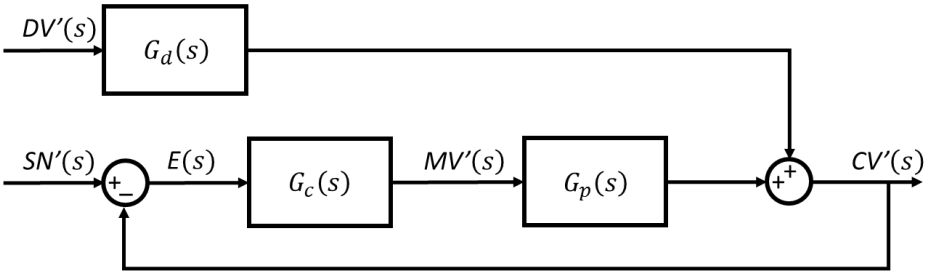
$$0 = SN - 0.6$$

$$SN = 0.6 \tag{8-11}$$

olarak bulunur.

b) Set noktasında 0.1'lik artış yapılması senaryosu için Simulink ile PID simülasyonu yaparak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.

1. Adım: Sistem için bir blok diyagram oluşturulur.



2. Adım: Blok diyagramdaki transfer fonksiyonları olan $G_d(s)$, $G_c(s)$ ve $G_p(s)$ türetilir.

$G_d(s)$, denklem (4-21)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_d(s) = \frac{CV'(s)}{DV'(s)} = \frac{X_3'(s)}{X_2'(s)} = \frac{K_d}{\tau s + 1}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}} = \frac{800 \times 0.5}{8} = 50$$

$$K_d = \frac{\overline{F_2}}{\overline{F_3}} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Bu durumda $G_d(s)$ aşağıdaki gibi olur.

$$G_d(s) = \frac{0.5}{50s + 1} \qquad (8\text{-}12)$$

$G_p(s)$, denklem (5-16)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_p(s) = \frac{CV'(s)}{MV'(s)} = \frac{{X_3}'(s)}{{F_1}'(s)} = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

$$\tau = \frac{\rho V}{\overline{F_3}} = \frac{800 \times 0.5}{8} = 50$$

$$K_p = \frac{x_1 - \overline{x_3}}{\overline{F_3}} = \frac{1 - 0.6}{8} = 0.05$$

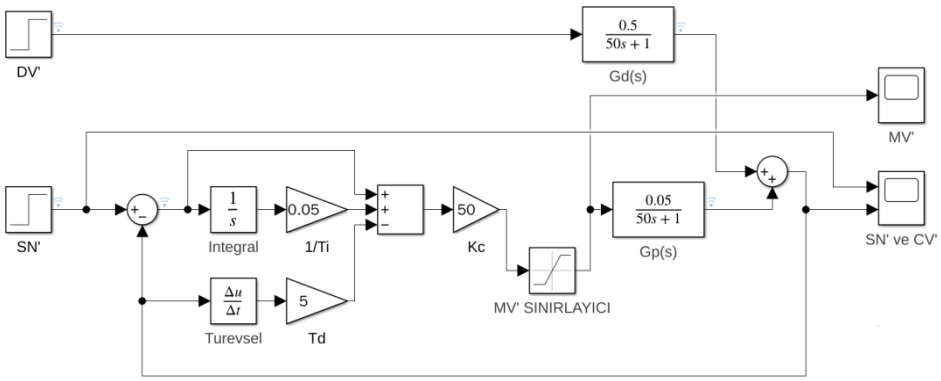
Bu durumda $G_p(s)$ aşağıdaki gibi olur.

$$G_p(s) = \frac{0.05}{50s + 1} \tag{8-13}$$

$G_c(s)$, denklem (7-14)'de aşağıdaki gibi türetilmişti.

$$G_c(s) = \frac{MV'(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i\, s} - K_c\, T_d\, s \tag{8-14}$$

3. Adım: Simulink'te programlama yapılır. Türetilen $G_d(s)$, $G_c(s)$ ve $G_p(s)$ fonksiyonları konumlarına yerleştirilir.

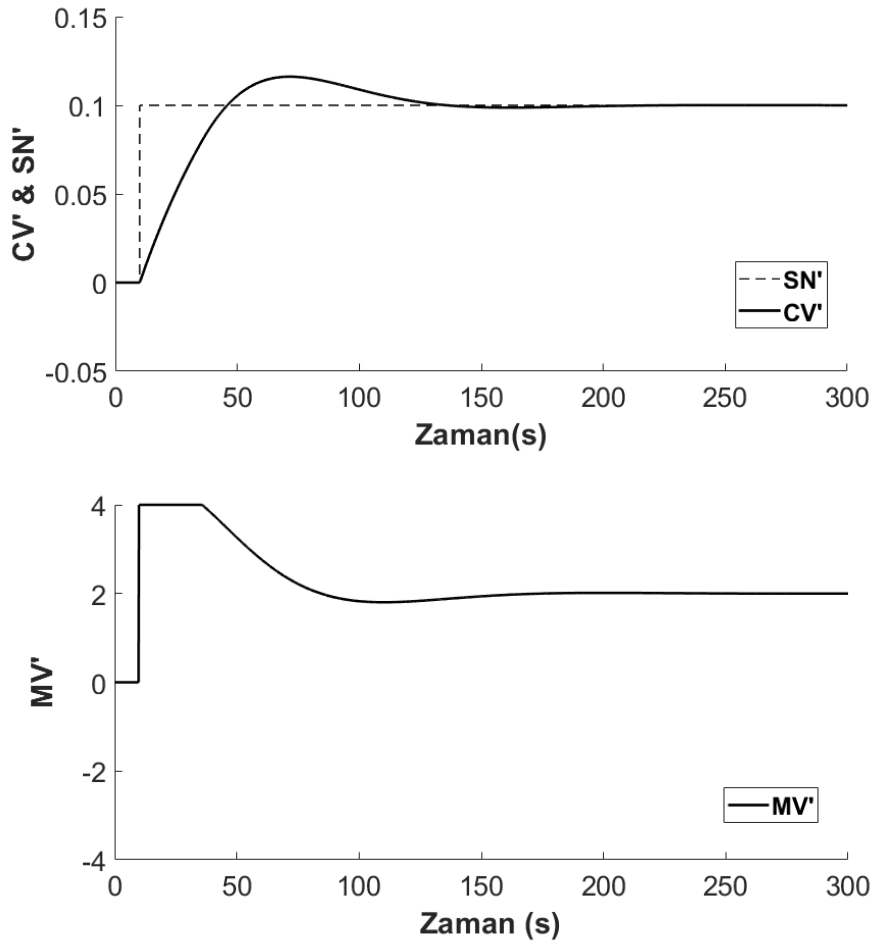


Şekil 8.5. Simulink'te PID kontrol döngüsü tasarımı ($K_c = 50$, $T_i = 20$ ve $T_d = 5$).

Burada $G_c(s)$'nin bileşenleri olan $[K_c]$, $\left[\frac{K_c}{T_i\, s}\right]$ ve $[K_c\, T_d\, s]$ ayrı ayrı yerleştirilmiştir. Simulink, PID kontrolün tüm bileşenlerini taşıyan hazır blok fonksiyonlara da sahiptir. Ancak bunlar tipik PID algoritmasından farklı olabilmektedir. Burada denklem (7-14)'te verilen PID algoritmasının bileşenleri ile birlikte kullanımını göstermek adına hazır PID bloklarını kullanmadık.

Şekil 8.5'te ayrıca MV' için sınırlayıcı koyulmuştur. Bu, MV değişkeninin sıfırın altına düşmesini önlemekte ve artışı %100'e kadar olacak şekilde sınırlamaktadır.

4. Adım: Simülasyon çalıştırılarak SN' için 0.1'lik basamak değişimine karşı MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafikleri elde edilir. Farklı K_c, T_i ve T_d değerleri test edilerek uygun değerler tespit edilir. Uygun değerlerin tespiti için bölüm 6.4'te verilen kontrol performansı ölçütleri dikkate alınmalıdır.

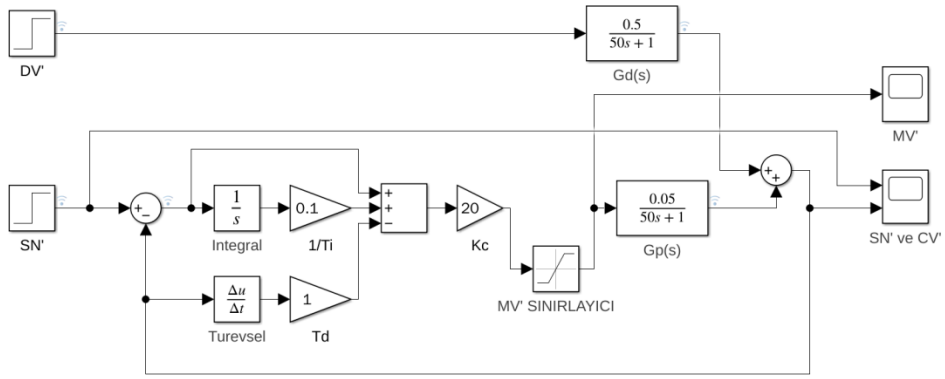


Şekil 8.6. Set noktasında 10. saniyede 0.1'lik artış yapıldığında $K_c = 50$, $T_i = 20$ *ve* $T_d = 5$ *değerleri için* MV' *ve* CV' *değişkenlerinin zamana bağlı değişimleri.*

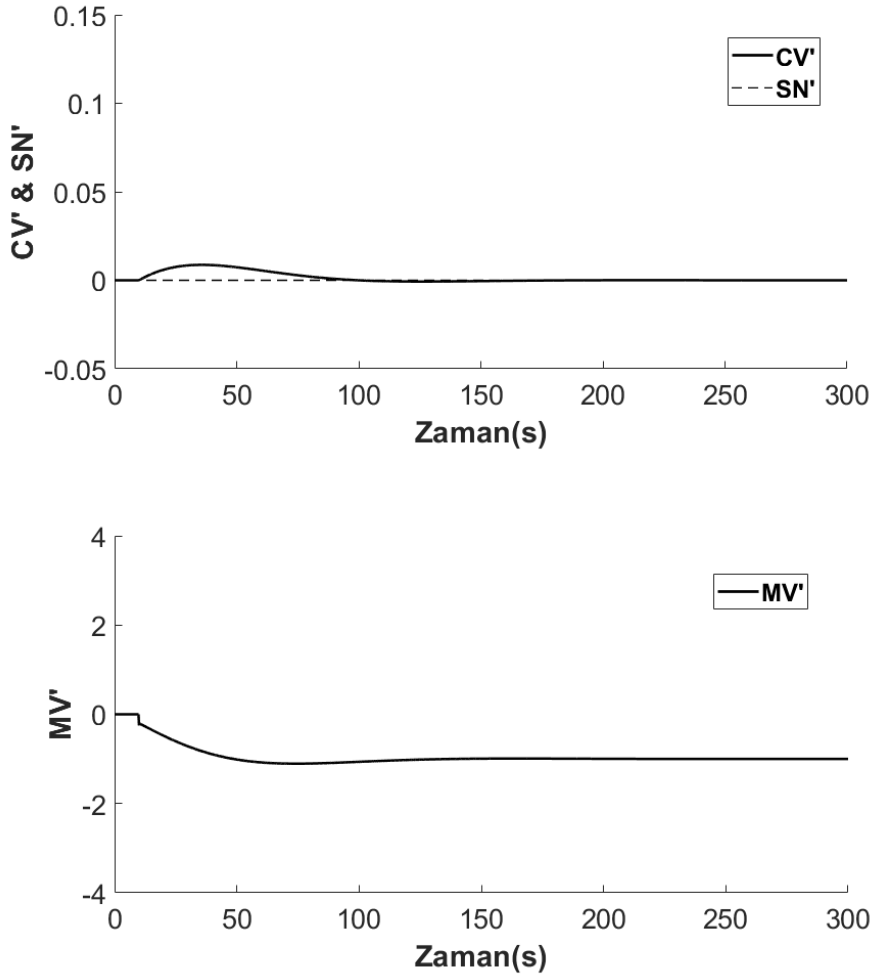
MV' için sınırlayıcı kullanıldığından dolayı belli bir süre izin verilen maksimum değerde seyretmiş daha sonra yavaş yavaş karar noktasına doğru azalma göstermiştir. Sistemde 10. saniyede değişim meydana gelmiştir. Offset oluşmadığı, yükseliş zamanının 40 s ve yatışma zamanının 100 s civarında olduğu görülmektedir.

c) Bozan etken değişkeni olan x_2'de 0.1'lik artış meydana gelmesi senaryosu için Simulink PID simülasyonunu kullanarak MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişim grafiklerini elde ediniz. Farklı K_c, T_i ve T_d değerlerini test ederek uygun değerler tespit ediniz.

Bozan etken değişkenindeki sapmanın kontrolü için yeni K_c, T_i ve T_d değerleri test edilerek tasarımdaki yerlerinde güncellenir.



Şekil 8.7. Simulink'te PID kontrol döngüsü tasarımı ($K_c = 20$, $T_i = 10$ ve $T_d = 1$).



Şekil 8.8. Set noktası sabit tutulup bozan etken değişkeninde 10. saniyede 0.1'lik artış yapıldığında $K_c = 20$, $T_i = 10$ ve $T_d = 1$ değerleri için MV' ve CV' değişkenlerinin zamana bağlı değişimleri.

Bozan etken değişkeninde artış olduktan yaklaşık 70 saniye sonra kontrol edilen değişkenin yeniden set noktasına ulaştığı, dolayısıyla offset oluşmadığı görülmektedir. Bu kontrol eyleminde ayarlanan değişken karar noktasına ulaştığında eski değeri olan 4 kg/s'den yaklaşık 3 kg/s'ye düşmüştür.

KAYNAKLAR

Alpbaz, Mustafa vd. Proses Kontrol. Gazi Kitabevi, 3. Basım, 2014.

Bequette, B Wayne. Process control: modeling, design, and simulation. Prentice Hall Professional, 2003.

Johnson, Curtis D. Process control instrumentation technology. Pearson Education, 2013.

Kress-Rogers, Erika - Brimelow, Christopher J B. Instrumentation and sensors for the food industry. Woodhead Publishing, 2001.

Marlin, T E. Process Control: Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance. McGraw-Hill Education, 2000. https://books.google.com.tr/books?id=zNJTAAAAMAAJ

MathWorks. “Simulink”. Erişim 24 Mart 2022. https://www.mathworks.com/products/simulink.html

National Instruments. “Online Help”. Erişim 20 Mart 2022. https://www.ni.com/getting-started/labview-basics/online-help

National Instruments. “What Is LabVIEW?” Erişim 20 Mart 2022. https://www.ni.com/en-tr/shop/labview.html

Seborg, Dale E vd. Process Dynamics and Control. John Wiley & Sons, 2011.